

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

G. ALEXITS, P. ERDŐS, L. KALMÁR, L. RÉDEI,
A. RÉNYI, B. SZ.-NAGY, P. TURÁN, O. VARGA

REDIGIT

G. HAJÓS

TOMUS XII

FASCICULI 3—4



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1961

ACTA MATH. HUNG.

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK
MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY U. 21

Az Acta Mathematica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, I., Fő utca 32. Bankszámla 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen „Kultúra” (Budapest, I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43 790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

Том XII — Вып. 3—4

РЕЗЮМЕ

ЗАМЕЧАНИЕ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ФЕНХЕЛА „ПРОБЛЕМЫ ДОЩЕЧЕК”

М. Богнар (Будапешт)

Доказательство В. Фенхела [2] поставленной А. Тарски „Проблемы дощечек” опирается на следующую лемму:

Лемма. Пусть $S_1, \dots, S_r$ суть параллельные полосы в n -мерном евклидовом пространстве. Пусть при $q = 1, \dots, r$ толщина S_q равна d_q , а ее нормальный вектор $\mathbf{v}_q$, где $|\mathbf{v}_q| = \frac{1}{2} d_q$. Пусть $\lambda > 1$. Тогда среди 2^r точек

$$\lambda(\pm \mathbf{v}_1 \pm \dots \pm \mathbf{v}_r)$$

будет такая, которая не покрывается ни одной из полос $S_1, \dots, S_r$.

В настоящей работе дается новое, чисто геометрическое доказательство леммы.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ НА АБСТРАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ ПОДХОДЯЩЕЙ КОНСТРУКЦИИ КАК НА ОБЛАСТЯХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Р. Петер (Будапешт)

Согласно устному сообщению Л. Калмара, Ху Ши-хуа высказал предположение, согласно которому эквивалентность теории частных-рекурсивных функций с теорией алгорифмов Маркова была бы более проще доказываема, если бы вместо гёделизации слов в качестве посреднического понятия было бы введено понятие частной-рекурсивной функции, определенной на множестве слов. Для этого можно было бы воспользоваться тем фактом, что, исходя из пустого слова, слова строятся аналогично числам, применяя вместо образования единственного следующего x' присоединение к слову x различных букв некоторого алфавита.

В практике встречается и ряд других примеров того, что на множествах, строящихся аналогично числам, например, на множествах формул, рекурсией определяются дальнейшие понятия. Поэтому кажется полезным множества, строящиеся аналогично числам, и определенные на них рекурсивные функции сделать объектом общего исследования. Общая теория не конструктивная, но из нее могут получаться полезные приложения к конструктивным специальным случаям.

Множество H , которое однозначно генерируется из элементов некоторого его подмножества H_0 некоторыми определенными на нем функциями, может быть названо

„свободным голоморфным множеством”. В главе I работы даются определения различных видов рекурсий на таких множествах, предполагая, что понятие „предыдущих элементов” определено на них подходящим образом, и примеры того, как можно избежать применения методов теории чисел в доказательствах теорем касающихся их. С другой стороны, доказывается, что всякая примитивная-рекурсивная функция в смысле теории чисел может быть распространена до примитивной-рекурсивной функции на множестве H . О функциях, определенных на множестве H рекурсией множества значений, симультанной рекурсией, вложенной рекурсией, показывается, что если на некотором расширении H' множества H (возможно, на самом H) можно определить вспомогательные функции, удовлетворяющие некоторым условиям, то они могут быть расширены до примитивных-рекурсивных функций на множестве H . Примитивные рекурсии H сводятся к более простому виду.

В главе II, специализируя общие результаты на множества слов, показывается, что они справедливы здесь без добавления новых основных функций.

Эти результаты в дальнейшем используются для приведения определенных на свободных упорядоченных голоморфных множества частных и общих рекурсивных функций к явной форме Клини.*

ПРОЕКТИВНЫЕ n -МЕРНЫЕ СИМПЛЕКСЫ В $2n-2$ -МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. Р. Мандан (Карагпур, Индия)

n -мерные симплексы (P) и (Q), расположенные в $2n-1$ - или $2n-2$ -мерном проективном пространстве, называются проективным относительно $n-2$ -мерного проективного пространства t , если t есть общая трансверсаль прямых, связывающих соответствующие вершины симплексов. Пусть R_i ($i=1, 2, \dots, n+1$) есть общая точка соответствующей пары $n-1$ -мерных граней симплексов. Автор дает синтетическое доказательство следующего обобщения теоремы Дезарга:

(P) и (Q) проективны относительно t в том и только в том случае, если точки R_i ($i=1, 2, \dots, n+1$) коллинейны.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ, СВЯЗАННОЙ С ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРЕМОЙ КОНТИНУУМА

А. Хайнал (Будапешт)

Настоящая работа содержит подробное доказательство теоремы автора, опубликованной в предварительном сообщении в 1956-ом году. (См. *Zeitschrift f. Math. Logik und Grundlagen d. Math.*, 2 (1956), стр. 131—136.)

Пусть A, N обозначают порядковые числа, которые могут быть определены некоторой формулой в системе аксиом теории множеств Гёделя, данной в [1], — в системе аксиом Σ^* .

* Замечание редакции. Окончание работы по техническим причинам будет опубликовано в следующем выпуске журнала.

Пусть $F_{A,N}$ означает аксиому $2^{\aleph} \leq \aleph_{A+N+1}$, $F_{A,N}^*$ аксиому

$$(e)(A \leq e < A + N + 1 \supset 2^{\aleph^e} = \aleph_{A+N+1}) \cdot (\mu)(\mu \geq A + N \supset 2^{\aleph^\mu} = \aleph_{\mu+1}).$$

Основная теорема работы — теорема 2 — утверждает, что для широкого класса порядковых чисел — для так называемых абсолютно определенных порядковых чисел — имеет место следующее:

Если система аксиом Σ^* , $F_{A,N}$ непротиворечива, то непротиворечива и система аксиом Σ^* , $F_{A,N}^*$. (Значение абсолютно определяемых порядковых чисел см. в § 6.)

Из ряда интересных следствий теоремы 2 упомянем следующее:

Утверждение $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ — гипотеза континуума — в том и только в том случае может быть доказана в системе аксиом Σ^* , если может быть доказана одна из формул $2^{\aleph_0} \neq \aleph_2$, $2^{\aleph_0} \neq 2^{\aleph_1}$.

Упомянем, что доказательства конструктивны, так, например, из любого опровержения в Σ^* формулы $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ — так называемой гипотезы Лузина — может быть построено доказательство формулы $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

О ГРАФАХ ИМЕЮЩИХ ДВЕ ОТМЕЧЕННЫЕ ТОЧКИ

А. Адам (Сегед)

В настоящей работе исследованы сильно связанные графы с двумя отмеченными точками. Работа состоит из трех глав. Глава I дает определение самых основных понятий, глава II занимается вопросами последовательного и параллельного разложения.

Глава III содержит структурные результаты, относящиеся к одному классу графов, неразложимых в смысле, указанном в работе [12]. Этот класс можно охарактеризовать как класс двухполюсных неразложимых графов, содержащих цепь без двойного ребра. В этих графах определены мосты и результаты освещают возможные помещения мостов.

Содержание работы в основном совпадает с содержанием работ [1], [2], [4].

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О РАЗМЕРНОСТИ И ЭНТРОПИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

И. Чисар (Будапешт)

А. Реньи ([1], [2]) ввел понятие размерности и d -мерной энтропии случайных величин. Он доказал [2], что если ξ случайная величина с абсолютно непрерывным распределением, для которой $H_0([\xi]) < +\infty$, то размерность ξ

$$d(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_0(\xi_n)}{\log n} = 1,$$

если далее

$$\mathfrak{J} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log \frac{1}{f(x)} dx$$

конечен, то одномерная энтропия ξ существует, а именно

$$H_1(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_0(\xi_n) - \log n) = \mathfrak{J},$$

где $H_0(\xi_n)$ энтропия Шэннона дискретной случайной величины $\xi_n = \frac{1}{n} [n\xi]$, а $f(x)$ функция плотности распределения от ξ .

В настоящей работе, изучая вопрос об обратимости теоремы Реньи, доказывается, что если распределение ξ не абсолютно непрерывно, то одномерной энтропии не существует, а $\lim_{n \rightarrow \infty} (H_0(\xi_n) - \log n) = -\infty$ (теорема 1). Доказательство элементарно, оно основывается на оценке величины $H_0(\xi_n) - \log n$ с помощью неравенства Иенсена.

Также элементарно доказывается, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (H_0(\xi_n) - \log n)$ существует при любом распределении ξ (теорема 2). Дается также более простое, использующее основные теоремы относительно интеграла Лебега, доказательство того, что в абсолютно непрерывном случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (H_0(\xi_n) - \log n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log \frac{1}{f(x)} dx = \mathfrak{I},$$

не требуя даже конечности $\mathfrak{I}$ (теорема 3). Теорема 4 утверждает, что в случае не абсолютно непрерывного распределения ξ (даже если ξ ограничена) $H_0(\xi_n) - \log n$ может стремиться к $-\infty$ как угодно медленно, следовательно утверждение теоремы 1 не может быть усилено.

Полученные результаты могут быть обобщены и для r -мерных случайных векторных величин.

НОРМАЛЬНЫЙ ПОРЯДОК АДДИТИВНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА МНОЖЕСТВЕ „СДВИНУТЫХ” ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

М. Б. Барбан (Ташкент, СССР)

Цель настоящей работы доказать следующую теорему:

Пусть $f(m)$ — неотрицательная сильно аддитивная ($f(m) = \sum_{p|m} f(p)$) арифметическая функция,

$$A_n = \sum_{p < n} \frac{f(p)}{p}, \quad A = \max_{p < n} f(p), \quad A_n \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad A_n = o(A_n).$$

Тогда A_n — нормальный порядок $f(m)$.

Метод, используемый работой, аналогичен методу Турана [3] и Линника [5].

О КОЛЬЦАХ С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ГЛАВНЫХ ПРАВЫХ ИДЕАЛОВ. II

Ф. Сас (Будапешт)

Теоретико-кольцевые понятия употребительны в смысле Джекобсона [13], причем кольца всегда ассоциативны. Алгебраические понятия обнаруживаются еще в [1], [4], [7] и [21].

MHR -кольцо означает кольцо с условием минимальности для главных идеалов.

MH_1R -кольцо является кольцом с условием минимальности для правых идеалов, лежащих в одном главном правом идеале.

MHI -кольцо (или MH_1I -кольцо) является двусторонним аналогом MHR -кольца (или MH_1R -кольца), т. е. кольцом с условием минимальности для главных идеалов (или для идеалов, лежащих в одном главном идеале).

$MMHR$ -кольцо является MHR -кольцом с условием максимальности для главных правых идеалов.

MHU -кольцо является кольцом с условием минимальности для подколец, порожденных одним элементом.

Правый идеал eA ($e^2 = e \in A$) кольца A называется „соответствующим”, если подкольцо $(1-e)AeA(1-e)$ нильпотентно, где $1 \in I$ (I кольцо целых чисел).

Пусть E кольцо всех эндоморфизмов одной абелевой группы M и $A = A^{(0)}$ некоторое подкольцо в $A^{(0)}$, причем $A^{(n+1)}$ централизатор подкольца $A^{(n)}$ в кольце A . Тривиально имеют место $A^{(2k)} = A^{(2)}$ и $A^{(2k-1)} = A^{(1)}$, если $k \geq 1$, а случай $k = 0$ является критическим.

A -модуль M с условием $MA = M$ называется перфектным. Вполне редуцибельный гомоморфный образ M/K модуля M является „отмеченным”, если из существования A -гомоморфизма φ произвольного вполне редуцибельного модуля M/L на M/K следует, что φ является изоморфизмом.

В этой статье доказываются следующие результаты:

Кольцо A является тогда и только тогда полупростым MHR -кольцом, когда оно есть прямая сумма своих идемпотентных минимальных правых идеалов. В этом случае A является и теоретико-кольцевой прямой суммой простых MHR -колец, где прямое разложение в сущности единственно. MHI -кольцо A , которое является подпрямой суммой простых колец, есть прямая сумма простых колец, и поэтому оно есть MH_1I -кольцо. Мы построили коммутативное MHI -кольцо (т. е. и MHR -кольцо), которое не является MH_1I -кольцом (или MH_1R -кольцом) и радикал Джекобсона которого ненильпотентен. Исследовались и специальные полупростые MHR -кольца. Мы получили одно необходимое и достаточное условие того, чтобы кольцо было прямой суммой тел, и т. д. Всякое полупростое MHR -кольцо регулярно в смысле Неймана, а конкретный пример показывает, что обратное утверждение неверно. Обобщается также один критерий Харада—Ковача или Кертеса.

Аддитивная группа MHR -колец или MHR -колец с единицей, примитивных MHR -колец, MHR -нильколец была полностью описана. В нильпотентных MH_1R -кольцах имеет место и условие минимальности для аддитивных подгрупп, лежащих в одном главном правом идеале.

Изучено строение абелевой группы G , кольцо A всех эндоморфизмов которой является MHR -кольцом. В этом случае A есть кольцо с условием минимальности и для главных левых идеалов, для всех правых идеалов, для всех левых идеалов. Мы построили абелеву группу M , кольцо E всех эндоморфизмов которой имеет MHR -подкольцо $A = A^{(0)}$ с условием $A^{(2)} \neq A^{(0)}$. Исследовались и системы Лоевия над MHR -кольцами, используя и понятие „отмеченных” вполне редуцибельных фактормодулей. Мы изучили и другие проблемы для модулей и перфектных модулей над MHR -кольцами.

Некоторая трансфинитная степень радикала Джекобсона J произвольного MHR -кольца A есть 0. Нижний нильрадикал Бэра—Мэккоя B , радикал L Левицкого, верхний нильрадикал N и радикал J Джекобсона равны между собой у MHR -колец. Пусть Z зероидрадикал Л. Фукса и G радикал Брауна—Мэккоя. Тогда в MHR -кольцах $J \subseteq Z$, и при существовании правой единицы $J = Z$ и $J = G$.

Мы изучили и $MMHR$ -кольца, „соответствующие” главные правые идеалы кольца $MMHR$ -колец и артиновских колец, и некоторые свойства MHU -колец.

Приведены и некоторые открытые проблемы у всех §.

О РАЗЛОЖЕНИИ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Г. Лангер (Дрезден)

Простой конструкцией доказывается, что нестягивающий оператор T (т. е. оператор, обладающий свойством $\|T\| \leq 1$) в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ может быть представлен ортогональной суммой двух операторов T_0 и T_1 так, что T_0 в соответствующем гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_0$ унитарен, а T_1 в пространстве $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0$ таково, что для каждого элемента $x \in \mathfrak{H}_1$ ($x \neq 0$), существует целое число n такое, что $\|T^{(n)}x\| < \|x\|$. Из этого следует, что все комплексные числа λ ($|\lambda| = 1$) принадлежат к множеству $\varrho(T_1) \cup \sigma_c(T_1)$ ([5]). С помощью преобразования Кэли соответствующие предложения доказываются для замкнутого оператора A , обладающего свойством $\vartheta(A) \subset \vartheta(A^*)$ и неотрицательной мнимой частью (т. е. для которого $\left(\frac{A - A^*}{2i}x, x\right) \geq 0$ при $x \in \vartheta(A)$).

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ КУЗЬМИНА

П. Сюс (Будапешт)

Кузьмин в 1928-ом году доказал гипотезу Гаусса, согласно которой

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_n(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2},$$

где $m_n(x)$ мера тех вещественных чисел, лежащих на отрезке $(0, 1)$, для которых

$$\frac{1}{\zeta_{n+1}(a)} \leq x;$$

здесь $\zeta_{n+1}(a)$ определено следующим образом: если $a = [0; a_1, a_2, \dots]$ правильное представление a в виде цепной дроби, то

$$\zeta_{n+1}(a) = [a_n; a_{n+1}, \dots].$$

Вместо (1) Кузьмин доказал более сильное соотношение

$$(2) \quad m_n(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2} + O(q^{\sqrt{n}}),$$

где $q < 1$.

Несколько позже (в 1929-ом году), не зная работы Кузьмина, П. Леви также доказал соотношение (2), с лучшим остаточным членом $O(q^n)$ вместо $O(q^{\sqrt{n}})$. Его метод значительно отличается от метода Кузьмина.

Настоящая работа из исходной точки Кузьмина просто выводит соотношение

$$m_n(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2} + O(q^n);$$

полученная постоянная q значительно меньше чем у П. Леви.

ДАЛЬНЕЙШИЕ „ОДНОСТОРОННИЕ” ТЕОРЕМЫ НОВОГО ТИПА В ТЕОРИИ ДИОФАНТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

П. Туран (Будапешт)

Автор в книге ¹, значительно переработанное издание которой готовится к печати на английском языке в серии *Interscience Tracts*, показал, что систематические экстремальные задачи относительно суммы степеней комплексных чисел, с одной стороны, могут рассматриваться как распространение классических теорем теории диофантического приближения, с другой стороны, имеют приложения в различных проблемах анализа и аналитической теории чисел. Различные вопросы относительно знака остаточного члена теоремы о простых числах привели к необходимости изучения „одно-сторонних” задач. В этом направлении в настоящей работе доказывается следующая теорема:

Если $1 = |z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_n|$ и с некоторым $0 < \varkappa \leq \frac{\pi}{2}$ $\varkappa \leq |\arg z_j| \leq \pi$ ($j = 1, 2, \dots, n$), то для любых комплексных $b_1, \dots, b_n$, удовлетворяющих условию $\min_{j=1, \dots, n} \operatorname{Re}(b_1 + \dots + b_j) > 0$, и неотрицательного целого m существуют такие целые v_1 и v_2 , что

$$m + 1 \leq v_j \leq m + n \left(3 + \frac{\pi}{\varkappa} \right) \quad (j = 1, 2),$$

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^n b_j z_j^{v_1} \right) \geq \left(\frac{n}{24e^3 \left(m + n \left(3 + \frac{\pi}{\varkappa} \right) \right)} \right)^{2n} \min_{j=1, \dots, n} \operatorname{Re}(b_1 + \dots + b_j)$$

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^n b_j z_j^{v_2} \right) \leq - \left(\frac{n}{24e^3 \left(m + n \left(3 + \frac{\pi}{\varkappa} \right) \right)} \right)^{2n} \min_{j=1, \dots, n} \operatorname{Re}(b_1 + \dots + b_j).$$

Первое приложение этой теоремы к остаточному члену теоремы о простых числах нашел С. Кнаповски, его результат скоро будет опубликован. В качестве дальнейшего приложения может быть получена следующая теорема, принадлежащая к направлению, инициатором которого был Чебышев:

Если $\Lambda(n)$ функция Манголдта

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{если } n = p^\alpha \text{ (} p \text{ простое число),} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

то существует такая положительная постоянная c , которая может быть задана в явном виде, что при $T > c$

$$g(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 1 \pmod{4}}} \Lambda(n) - \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 3 \pmod{4}}} \Lambda(n)$$

меняет знак на интервале $T^{1/3} \leq x \leq T$ (и даже принимает значение, превосходящее

$$\frac{\sqrt{T}}{\log^{10} T} \text{ и меньшее чем } -\frac{\sqrt{T}}{\log^{10} T}.$$

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ (СХОДИМОСТЬ В СРЕДНЕМ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ)

Я. Балаж и П. Туран (Будапешт)

Пусть дана бесконечная треугольная матрица

$$(1) \quad x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

причем

$$x_1^{(n)} > x_2^{(n)} > \dots > x_n^{(n)}.$$

Пусть $L_n(f; x)$ обозначает n -ый интерполяционный многочлен Лагранжа, относящийся к системе узлов (1) и к данной функции $f(x)$.

Если $g(x)$ такая целая функция, что

$$g(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{2r},$$

все коэффициенты a_r положительны и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log g(x)}{x^2} dx = +\infty,$$

функция $p(x)$ такова, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) p(x) dx < +\infty,$$

систему узлов (1) образуют корни многочленов, ортогональных на $(-\infty, +\infty)$ по весу $p(x)$, а определенная на $(-\infty, +\infty)$ непрерывная функция $f(x)$ такова, что

$$\lim_{n \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} = 0,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x) - L_n(f; x)\}^2 p(x) dx = 0.$$

Насколько авторам известно, это первый общий результат относительно интервала $(-\infty, +\infty)$. Более того, этот результат не был известен даже для случая многочленов Эрмита, ортогональных на $(-\infty, +\infty)$ по весу e^{-x^2} .

Теорему можно применить к общей теории многочленов, ортогональных на $(-\infty, +\infty)$ по весу $p(x)$. Авторы займутся этим вопросом в следующей работе.

ON W. FENCHEL'S SOLUTION OF THE PLANK PROBLEM

By

M. BOGNÁR (Budapest)

(Presented by G. HAJÓS)

We denote by E^n the n -dimensional Euclidean space. A strip $S \subset E^n$ is a closed convex set bounded by two parallel hyperplanes. Their distance is the *width* of S . The vector $\mathbf{v}$ is said to be the *width vector* of S , if S is bounded by hyperplanes normal to $\mathbf{v}$ and the width of S is $2|\mathbf{v}|$. The *width* of a convex body $K \subset E^n$ with inner points is the minimal width of a strip covering K . We denote points also by vectors leading to them from the origin.

A. TARSKI stated in 1932 the following conjecture, known as plank problem:

If a convex body K is covered by a finite number of strips, then the sum of their widths is not less than the width of K .

TH. BANG's [1] proof of this conjecture has been simplified by W. FENCHEL [2]. This simplified proof is based on three simple lemmas, which reduce the conjecture to the following statement:

The union of the strips $S_1, \dots, S_r$ of width vectors $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ does not contain each of the 2^r points $\lambda(\pm \mathbf{v}_1 \mp \dots \pm \mathbf{v}_r)$, where $\lambda \geq 1$ and the origin is an arbitrary point.

Present note gives an alternative proof of this statement. We denote by II the set of the 2^r points $\lambda(\pm \mathbf{v}_1 \mp \dots \pm \mathbf{v}_r)$, further by (P, H) and (P, S) the distance of the point P from the hyperplane H and from the strip S , respectively.

We start the proof with the special case in which the middle hyperplanes $H_1', \dots, H_r'$ of the strips $S_1, \dots, S_r$ have a common point C . Let P be an element of II of maximal distance CP . We show that P is not covered by $S_1, \dots, S_r$, i. e. P proves our statement.

If the sign of $\mathbf{v}_i$ ($i = 1, \dots, r$) is altered in the vector defining P , we get a vector which defines $P_i \in II$. By definition of P we have $CP \geq CP_i$. Consequently, since $C \in H_i$ and $PP_i \perp H_i$, we obtain $(P, H_i) \geq (P_i, H_i)$, $(P, H_i) \geq \frac{1}{2} PP_i = \lambda |\mathbf{v}_i|$ and $(P, S_i) \geq (\lambda - 1) |\mathbf{v}_i|$. This proves that $S_1, \dots, S_r$ contain neither P nor any point Q for which $PQ < (\lambda - 1)d$, where $d = \min(|\mathbf{v}_1|, \dots, |\mathbf{v}_r|)$.

We reduce now the general case to the just settled special one. We imbed our E'' in an E^{n+1} , leave the origin unaltered in E'' , denote by $\mathbf{e}$ a unit vector normal to E'' and by C' the point $t\mathbf{e}$. Let us define the hyperplane H'_i ($i=1, \dots, r$) by $C' \in H'_i$ and $H_i \subset H'_i$, further the strip S'_i by his middle hyperplane H'_i and by $S'_i \cap E'' = S_i$. We denote by $\mathbf{v}'_i$ the width vector of S'_i for which $\mathbf{v}'_i \mathbf{v}'_i > 0$ and by Π' the set of the 2^r points $\lambda(\pm \mathbf{v}'_1 \pm \dots \pm \mathbf{v}'_r)$. We apply the special case of our statement to the strips $S'_1, \dots, S'_r$, and infer that the strips $S'_1, \dots, S'_r$ cover neither P' nor any point Q' for which $P'Q' < (\lambda-1)d'$ where $d' = \min(|\mathbf{v}'_1|, \dots, |\mathbf{v}'_r|)$.

If $t \rightarrow \infty$, then clearly $\mathbf{v}'_i \rightarrow \mathbf{v}_i$ ($i=1, \dots, r$), further $\Pi' \rightarrow \Pi$ and $d' \rightarrow d$. Consequently, if t is sufficiently large, we have $d' > \frac{d}{2}$ and P' defines

$P \in \Pi$ for which $P'P < (\lambda-1)\frac{d}{2}$, i. e. P satisfies our conditions for Q' . Hence P is not covered by $S'_1, \dots, S'_r$, nor by the strips $S_1, \dots, S_r$ contained in them. This completes the proof of the statement.

We remark, in order to facilitate comparison with FENCHEL's paper, that the expression

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^r \varepsilon_i \mathbf{v}_i \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^r \varepsilon_i c_i$$

dealt with by FENCHEL is equal to

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \left[\left(\lambda \sum_{i=1}^r \varepsilon_i \mathbf{v}_i - t\mathbf{e} \right)^2 - (t\mathbf{e})^2 \right],$$

where ε_i is $+1$ or -1 ($i=1, \dots, r$). This shows that our maximum method leads to the same point P as FENCHEL's maximum method.

(Received 1 September 1959)

References

- [1] TH. BANG, On covering by parallel-strips, *Matematisk Tidsskrift B*, (1950), pp. 49—53.
- [2] W. FENCHEL, On Th. Bang's solution of the plank problem, *Matematisk Tidsskrift B*, (1951), pp. 49—51.

ÜBER DIE VERALLGEMEINERUNG DER THEORIE DER REKURSIVEN FUNKTIONEN FÜR ABSTRAKTE MENGEN GEEIGNETER STRUKTUR ALS DEFINITIONSBEREICHE¹

Von
RÓZSA PÉTER (Budapest)
(Vorgelegt von L. KALMÁR)

1. Wie ich von L. KALMÁR erfahren habe, hat HU SCHI-HUA den Gedanken aufgeworfen, daß die Äquivalenz der Theorie der partiell-rekursiven Funktionen mit der Theorie der Markovschen Algorithmen durch Vermeidung der Gödelisierung der „Worte“ vielleicht einfacher bewiesen werden kann, wenn als vermittelnder Zwischenbegriff der Begriff der auf der Menge der Worte definierten partiell-rekursiven Funktion eingeführt wird. Dabei hätte man zu benutzen, daß die Worte ähnlich wie die natürlichen Zahlen aufgebaut werden, nur statt aus 0 ausgehend die einzige Funktion x' zu benutzen, geht man hier aus dem leeren Wort Λ aus, und benutzt zur Bildung der Worte das Anknüpfen der Buchstaben eines Alphabets $\{\dots, a_i, \dots\}$.

Eine ähnliche Situation kommt in der Praxis oft vor, wie darauf auch KLEENE's Buch² hingewiesen hat, worin die verwendeten „entities“ von mehreren 0-Elementen ausgehend aufgebaut werden, aber durch eine einzige Nachfolgerfunktion. Ähnlicherweise werden zum Beispiel auch Terme oder Formeln aus gewissen Anfangselementen ausgehend durch gewisse Operatio-

¹ Über die Ergebnisse dieser Arbeit habe ich (mit geringer Abweichung) in Warszawa im „Internationalen Symposium der Grundlagen der Mathematik: Infinitistische Methoden“ am 3-ten September 1959 einen Vortrag gehalten. — *Zusatz bei der Korrektur (am 25. August 1961)*: Nach diesem Symposium und nach Einreichung noch im selben Monat vorliegender Arbeit haben verschiedene Verfasser gewisse Ergebnisse über den Spezialfall der Wortemengen publiziert. Ich habe von L. KALMÁR erfahren, daß ihm HU SCHI-HUA am 27. Dezember 1959 brieflich mitgeteilt hat: es werden von ihm über dieses Thema (genauer: über die Verallgemeinerung der Theorie der partiell-rekursiven Funktionen für Wortemengen mit endlichem Alphabet) drei Arbeiten im Acta Math. Sinica bzw. im Scientifica Sinica erscheinen (die Eingegangen-Daten dieser Arbeiten sind mir nicht bekannt). G. ASSER hat über „Rekursive Wortfunktionen“ auf der Tagung der Deutschen Math. Vereinigung (19–23. Oktober 1959) in Münster einen Vortrag gehalten; das wird auch in der (demnach offenbar später eingegangenen) Arbeit „Rekursive Wortarithmetik“ von V. VUČKOVIĆ (*Ac. Serbe des Sc., Publ. de l'Inst. Math.*, 14 (1960), S. 9–60) zitiert. Die Ergebnisse von G. ASSER wurden in seiner Arbeit „Rekursive Wortfunktionen“ in der *Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.*, 6 (1960), S. 258–278, veröffentlicht. Sowohl G. ASSER als auch V. VUČKOVIĆ beschränken sich auf Wortemengen, sogar mit endlichem Alphabet.

² S. C. KLEENE, *Introduction to metamathematics* (Amsterdam—Groningen, 1952).

nen gebildet, und auf den so erhaltenen „zahlenartigen“ Mengen werden weitere Begriffe rekursiv definiert. Um auch ein Beispiel von den vielen zu nennen: in dem Gentzenschen Beweis der Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie werden die Reduzierten einer Formel rekursiv definiert auf der Formelmengenge. In diesen Fällen wird wesentlich benutzt, daß die betreffenden zahlenartigen Gebilde, zum Beispiel Formeln, aus den Ausgangsgebilden eindeutig aufgebaut werden.

Man könnte noch zahlreiche weitere Beispiele aufzählen.

Es scheint demnach lohnend, die zahlenartig aufbaubaren Mengen und die auf diesen definierten rekursiven Funktionen allgemein zu untersuchen. Die allgemeine Theorie wird natürlich nicht konstruktiv sein, aber es können sich daraus nützliche Anwendungen für die konstruktiven Spezialfälle ergeben.

Betreffend der allgemeinen Kenntnisse über rekursive Funktionen berufe ich mich auf mein Buch.³ Es wird zum Beispiel oft benutzt, daß die in $\frac{m}{n}$ enthaltene größte ganze Zahl $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$, der Binomialkoeffizient $\binom{m}{n}$ und

$$m \dot{-} n = \begin{cases} m - n, & \text{falls } m \geq n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

primitiv-rekursive zahlentheoretische Funktionen sind, und m/n eine primitiv-rekursive zahlentheoretische Beziehung ist.

In Kapitel I gebe ich die Definition einer zahlenartig aufbaubaren Menge an; zeige, wie verschiedene Rekursionsarten auf einer solchen Menge definiert werden können, und mit welchen Bedingungen die Ergebnisse über die entsprechenden zahlentheoretischen Rekursionsbegriffe auf diese übertragen werden können. In den Weiteren betrachte ich als ein Beispiel den Fall der Menge der aus einem Alphabet gebildeten Worte. Das wird auch zur Darstellung von partiell- bzw. allgemein-rekursiven Funktionen auf zahlenartig aufbaubaren Mengen in einer Art Kleenesche explizite Form benutzt.

I

2. Sei H eine beliebige nicht leere Menge, H_0 eine nicht leere Teilmenge von H (die Elemente von H_0 werden die Rolle von 0 übernehmen) und F eine Teilmenge der auf H definierten Funktionen mit einer beliebigen Anzahl von Argumenten, die als Werte ebenfalls Elemente von H annehmen (die Elemente von F übernehmen die Rolle von x').⁴ Sei H_1 die Menge derjenigen

³ R. PÉTER, *Rekursive Funktionen* (Budapest, 1957), 2-te Auflage.

⁴ In den Weiteren wird Funktion — falls nicht explizit etwas anderes gesagt wird — immer eine derartige Funktion bedeuten.

Elemente von H , die sich als Werte ergeben, wenn für alle Argumente der zu F gehörigen Funktionen Elemente aus H_0 eingesetzt werden; ferner sei H_2 die Menge derjenigen Elemente von H , die sich als Werte ergeben, wenn für alle Argumente der zu F gehörigen Funktionen Elemente aus $H_0 + H_1$ eingesetzt werden, aber mindestens für ein Argument ein Element aus H_1 , usw.; sind $H_0, \dots, H_n$ bereits definiert, so sei H_{n+1} die Menge derjenigen Elemente von H , die sich als Werte ergeben, wenn für alle Argumente der zu F gehörigen Funktionen Elemente aus $H_0 + \dots + H_n$ eingesetzt werden, aber mindestens für ein Argument ein Element von H_n . Wir nehmen an, daß die Vereinigungsmenge von $H_0, H_1, H_2, \dots$ die Menge H erschöpft. Eine Menge von dieser Struktur nenne ich wegen der ganzzahlenartigen Aufbaubarkeit *holomorph*.

Eine für die Möglichkeit der Definition von zahlentheoretischen Funktionen durch Rekursion wesentliche Eigenschaft der natürlichen Zahlen ist ihre *eindeutige* Aufbaubarkeit aus 0 mit Hilfe der Funktion x' . Etwas ähnliches werde ich auch im allgemeinen Fall der rekursiven Definition von Funktionen auf einer holomorphen Menge H benötigen, nämlich, daß die Mengen $H_0, H_1, H_2, \dots$ paarweise fremd sind, daß sogar jedes ihrer Elemente nur auf eine Weise durch Einsetzen von Elementen vorangehender Mengen für Argumente einer Funktion aus F entsteht, daß also eindeutig bestimmt ist, welche diese Funktion aus F ist, und welche Elemente für ihre Argumente stehen. Eine holomorphe Menge von dieser Eigenschaft nenne ich mit einem aus der Algebra entliehenen Ausdruck eine *freie holomorphe Menge*. Eine holomorphe Menge H heißt also frei, falls aus $f(x_1, \dots, x_r) = g(y_1, \dots, y_s)$ mit $f, g \in F$ und $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s \in H$ stets $f = g$ (also $r = s$) und $x_1 = y_1, \dots, x_r = y_s$ folgt.

In den Folgenden soll H immer eine freie holomorphe Menge bezeichnen; auch die Bezeichnungen $F, H_0, H_1, \dots$ sollen festgehalten werden. Ist $h \in H_i$, dann sage ich, daß $i = o(h)$ die Ordnung von h ist.

Als Beispiele von freien holomorphen Mengen seien die folgenden angeführt:

BEISPIEL 1. Es sei $H = \{0, 1, 2, \dots\}$ mit $H_0 = \{0\}$, $F = \{x'\}$. Hier ist $o(x) = x$ für jedes $x \in H$. Auf dieses Beispiel werde ich mich mit den Worten „zahlentheoretischer Fall“ beziehen.

BEISPIEL 2. H sei die Menge der Worte über einem beliebigen „Alphabet“ $A = \{\dots, a_i, \dots\}$, d. h. die Menge der endlichen Folgen aus Elementen von A ; H_0 sei $\{\Lambda\}$, wobei Λ das „leere Wort“ bezeichnet, F bestehe aus den Funktionen einer Variablen, die jedes Wort $x \in H$ in das durch Anknüpfen einer „Buchstaben“ (d. h. eines Elementes a_i von A) entstehende Wort xa_i überführt (i soll eine Indexmenge von beliebiger Mächtigkeit durchlaufen). Hier ist die Ordnung eines beliebigen Wortes $a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_r}$ gleich seiner Länge r .

BEISPIEL 3. H sei die Menge der Formeln des Aussagenkalküls; H_0 sei die Menge der Aussagenvariablen, F bestehe aus den für $x \in H$, $y \in H$ durch

$$\nu(x) = \bar{x}, \quad \kappa(x, y) = (x \& y), \quad \delta(x, y) = (x : y).$$

$$\iota(x, y) = (x \rightarrow y), \quad \varepsilon(x, y) = (x \leftrightarrow y)$$

definierten Funktionen $\nu, \kappa, \delta, \iota$ und ε . In diesem Fall wird die Freiheit der holomorphen Menge H durch die angedeutete Art der Verwendung von Klammern gesichert.

3. Im zahlentheoretischen Fall ist für die primitive Rekursion der Begriff des *unmittelbaren Vorgängers* x , und für die Wertverlaufsrekursion der Begriff der *Vorgänger* $0, 1, \dots, x$ einer von 0 verschiedenen Zahl x' wesentlich. Offenbar benötigt man auch im allgemeinen Fall entsprechende Begriffe. Zunächst könnte man daran denken, diese Begriffe auf Grund der Struktur von H fest zu definieren, etwa im Fall $x \notin H_0$ die *unmittelbaren Konstituenten* von x , d. h. die eindeutig bestimmten Elemente $x_1^*, \dots, x_m^*$ von H , für welche $x = f^*(x_1^*, \dots, x_m^*)$ mit einer Funktion $f^* \in F$ gilt, als die unmittelbaren Vorgänger von x zu betrachten, und den Begriff der Vorgänger entsprechend zu definieren (siehe Beispiel 4). Dann wäre aber $o(x_i^*) = o(x) - 1$ nicht für alle $1 \leq i \leq m$ gesichert, obwohl wichtige Spezialfälle zeigen, daß es zweckmäßig ist darauf zu bestehen. Es ergibt sich sogar, daß es überhaupt nicht zweckmäßig ist, den Vorgängerbegriff für jede freie holomorphe Menge ein für allemal festzulegen, da bei verschiedenen Verallgemeinerungen der Sätze der Theorie der rekursiven Funktionen verschiedene Vorgängerbegriffe als zweckmäßig erscheinen. Ich setze daher voraus, es sei jedem $x \in H$ eine Unter-*menge* $V(x)$ von H zugeordnet, deren Elemente die *Vorgänger* von x heißen. Sei auch $x \in V(x)$; die von x verschiedenen Elemente von $V(x)$ nenne ich die *echten Vorgänger* von x . Als kurze Bezeichnung verwende ich $y < x$ dafür, daß y ein echter Vorgänger von x ist, und somit $y \leq x$ dafür, daß y ein Vorgänger von x ist. Jedenfalls setze ich die Gültigkeit der folgenden „Vorgängeraxiome“ voraus:

V1. Für jedes $x \in H$ ist $x \in V(x)$ (wie gesagt); d. h. $x \leq x$.

V2. Für jedes $x \in H$, $x \notin H_0$ gehören die unmittelbaren Konstituenten von x zu $V(x)$; d. h. für $x = f^*(x_1^*, \dots, x_m^*)$, $f^* \in F$, $x_1^*, \dots, x_m^* \in H$ gilt $x_1^* \leq x, \dots, x_m^* \leq x$. (Offenbar gilt dann sogar $x_1^* < x, \dots, x_m^* < x$.)

V3. Aus $y < x$ und $z < y$ folgt $z < x$.

V4. Aus $y < x$ folgt $o(y) < o(x)$.

Ein Vorgänger y von $x \in H$, $x \notin H_0$ mit $o(y) = o(x) - 1$ heiße ein *unmittelbarer Vorgänger* von x .

V5. Jeder echte Vorgänger von $x \in H$ ist ein Vorgänger eines unmittelbaren Vorgängers von x ; d. h. für $y \prec x$ gibt es ein z mit $y \prec z$, $z \prec x$ und $o(z) = o(x) - 1$.

V6. Die Menge der unmittelbaren Vorgänger von $x \in H$ ist endlich, und zwar liegt bei festem $f^* \in F$ die Anzahl der unmittelbaren Vorgänger von $x = f^*(x_1^*, \dots, x_m^*)$ unter einer (eventuell von f^* abhängiger, aber) von $x_1^*, \dots, x_m^*$ unabhängiger Schranke.

V1—V5 drücken plausible Forderungen aus; V6 wird dadurch motiviert, daß sonst bereits in eine primitive Rekursion (d. h. Definition des Wertes einer Funktion f an einer beliebigen Stelle $x = f^*(x_1^*, \dots, x_m^*) \in H$, in einer im allgemeinen von $f^* \in F$ abhängigen Weise, mit Hilfe der Werte von f für die unmittelbaren Vorgänger von x , wobei die Funktionswerte an den Stellen $x \in H_0$ direkt angegeben werden) Funktionen von einer veränderlichen Anzahl von Argumenten eingehen könnten.

Eine freie holomorphe Menge H mit einem den Axiomen V1—V6 genügenden Vorgängerbegriff nenne ich eine (partiell) *angeordnete freie holomorphe Menge*. (Die Beziehung $y \prec x$ definiert wegen V1, V3 und V4 offenbar eine partielle Anordnung von H , die freilich mit der Struktur von H als freie holomorphe Menge verknüpft ist, ebenso wie etwa die Anordnung eines angeordneten Körpers mit der Körperstruktur.)

Als Beispiele von angeordneten freien holomorphen Mengen seien die folgenden angeführt. Der Leser möge V1—V6 bei jedem Beispiel verifizieren.

BEISPIEL 1'. Im zahlentheoretischen Fall sei $V(x) = \{0, 1, \dots, x\}$. Offenbar ist dann der einzige unmittelbare Vorgänger von x' seine einzige unmittelbare Konstituente x .

BEISPIEL 2'. Aus der freien holomorphen Menge H des Beispiels 2 (der Menge der Worte über einem beliebigen Alphabet) gewinnt man eine angeordnete freie holomorphe Menge, indem man unter Vorgänger eines Wortes $a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_r}$ seine „Anfangstücke“

$$a_{i_1}, a_{i_1}a_{i_2}, \dots, a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_{r-1}}, a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_r}$$

versteht. Dann ist wiederum der einzige unmittelbare Vorgänger eines Wortes $x \neq \Lambda$ seine einzige unmittelbare Konstituente $x^{-1} = a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_{r-1}}$ (im Fall $r = 1$ $x^{-1} = \Lambda$). Um x^{-1} für jedes $x \in H$ zu definieren, setze ich $\Lambda^{-1} = \Lambda$; dies ist selbstverständlich kein unmittelbarer Vorgänger von Λ .

BEISPIEL 2''. Aus derselben freien holomorphen Menge H gewinnt man eine andere angeordnete freie holomorphe Menge, indem man unter Vorgänger eines Wortes $x = a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_r}$ das leere Wort Λ , ferner sämtliche „Abschnitte“

$a_{i_k} a_{i_{k+1}} \dots a_{i_l}$ ($1 \leq k \leq l \leq r$) von x versteht. Z. B. sind dann die Vorgänger des Wortes $a_1 a_2 a_3 a_4$ die folgenden Worte:

$$\wedge, a_1, a_2, a_1 a_2, a_3, a_2 a_3, a_1 a_2 a_3, a_4, a_3 a_4, a_2 a_3 a_4, a_1 a_2 a_3 a_4.$$

Unter diesen gibt es zwei unmittelbare Vorgänger von x (hier $a_1 a_2 a_3$ und $a_2 a_3 a_4$); und offenbar gilt dasselbe für jedes Wort x , das mindestens aus zwei Buchstaben besteht. Der eine entsteht durch Weglassen des letzten Buchstaben, der andere durch Weglassen des ersten Buchstaben des Wortes. Der erste wurde bereits mit x^{-1} bezeichnet, der zweite soll mit ${}^{-1}x$ bezeichnet werden. In diesem Fall ist nur eine der unmittelbaren Vorgänger, nämlich x^{-1} , eine unmittelbare Konstituente von x . Für ein Wort $x = a_i$ von der Länge 1, das $a_i^{-1} =$ als einzigen (unmittelbaren) Vorgänger (und zugleich einzige unmittelbare Konstituente) besitzt, soll ${}^{-1}a_i =$ gesetzt werden; und für $x =$ sei ebenfalls ${}^{-1} = {}^{-1} =$. Später werden wir sehen, daß dieser Vorgängerbegriff von einem wichtigen Gesichtspunkt aus vorteilhafter ist, als der in 2' verwendete, auf erstem Blick natürlicher erscheinende Vorgängerbegriff.

BEISPIEL 3'. Aus der freien holomorphen Menge H des Beispiels 3 (der Menge der Formeln des Aussagenkalküls) gewinnt man eine angeordnete freie holomorphe Menge, indem man unter Vorgänger einer Formel ihre Teilformeln (im üblichen Sinn) versteht. Man sieht leicht, daß in diesem Fall eine Formel von der Form x die Formel x als einzigen unmittelbaren Vorgänger (und zugleich einzige unmittelbare Konstituente), eine Formel von der Form $(x \& y)$, $(x \vee y)$, $(x \rightarrow y)$ oder $(x \leftrightarrow y)$ aber entweder beide, oder nur eine seiner unmittelbaren Konstituenten x und y als unmittelbare Vorgänger besitzt. Z. B. hat die Formel $((A \& B) \rightarrow (B \vee A))$ zwei unmittelbare Vorgänger, nämlich $(A \& B)$ und $(B \vee A)$; die Formel $((A \& (A \rightarrow B)) \rightarrow B)$ aber nur einen, nämlich $(A \& (A \rightarrow B))$.

BEISPIEL 4. Auch im Fall einer beliebigen freien holomorphen Menge kann man einen den Axiomen V1—V6 genügenden Vorgängerbegriff definieren. Ich nenne für jedes $x \in H$ das Element x selbst, seine unmittelbaren Konstituenten, die unmittelbaren Konstituenten der unmittelbaren Konstituenten von x usw. die *Konstituenten* von x . Genauer definiert man die Menge der Konstituenten von x durch (Wertverlaufs-) Rekursion in Bezug auf die Ordnung von x wie folgt. Für $o(x) = 0$, d. h. $x \in H_0$, ist x die einzige Konstituente von x . Für $o(x) = n + 1$, also $x = f^*(x_1^*, \dots, x_m^*)$ mit $o(x_1^*) \leq n, \dots, o(x_m^*) \leq n$ sind die Konstituenten von x die Folgenden: x selbst, ferner die Konstituenten von $x_1^*, \dots, x_m^*$. Versteht man unter Vorgänger von x seine Konstituenten, so gewinnt man aus H eine angeordnete freie holomorphe Menge. In diesem Fall kommen die unmittelbaren Vorgänger von x unter seinen unmittelbaren Konstituenten vor, aber nicht notwendig jede unmittelbare Konstituente von x .

ist sein unmittelbarer Vorgänger (im Fall $o(x_i^*) < n$ ist nämlich x_i^* kein unmittelbarer Vorgänger von x).

Dieses Beispiel dient nur um zu zeigen, daß aus jeder freien holomorphen Menge durch einen geeigneten Vorgängerbegriff eine angeordnete freie holomorphe Menge gewonnen werden kann; in Spezialfällen kann sich aber (wie beim Beispiel 2" schon gesagt wurde) ein von dem hier angeführten verschiedener Vorgängerbegriff als geeigneter erweisen. Jedenfalls folgt aus V1, V2 und V3, daß die Konstituenten von $x \in H$ stets unter seinen Vorgängern auftreten; also ist der hier angeführte Vorgängerbegriff der engste, der diesen Axiomen genügt.

4. Von nun an soll H stets eine angeordnete freie holomorphe Menge bezeichnen. Für jedes $f^* \in F$ bedeute $t = t(f^*)$ das Maximum der (wegen V6 beschränkten) Anzahl der unmittelbaren Vorgänger von $x = f^*(x_1^*, \dots, x_m^*)$, wobei $x_1^*, \dots, x_m^*$ die Menge H durchlaufen. Indem wir die unmittelbaren Vorgänger von x in einer beliebigen, aber festen Reihenfolge, nötigenfalls (wenn nämlich ihre Anzahl weniger als t beträgt) mit Wiederholung, aufzählen, werden die unmittelbaren Vorgänger von x dauernd mit $x_1, \dots, x_t$ bezeichnet. (Die gewählte Reihenfolge der unmittelbaren Vorgänger soll für Elemente, welche dieselben unmittelbaren Vorgänger besitzen, die selbe sein.)

Es sei nun gegeben eine angeordnete freie holomorphe Menge H . Jedem $h \in H_0$ bzw. $f^* \in F$ sei je eine Funktion g_h von r bzw. g_{f^*} von $2t + r (= 2t(f^*) + r)$ Argumenten zugeordnet (wo r eine beliebige natürliche Zahl, einschließlich Null, bedeutet). Dann sagen wir, daß die Funktion f von $r + 1$ Argumenten durch *primitive Rekursion* mit Hilfe dieser Funktionen definiert wird, wenn

$$f(h, u_1, \dots, u_r) = g_h(u_1, \dots, u_r), \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und falls x der Form $x = f^*(\dots)$ ist, wo $f^* \in F$,

$$f(x, u_1, \dots, u_r) = g_{f^*}(x_1, \dots, x_t, u_1, \dots, u_r, f(x_1, u_1, \dots, u_r), \dots, f(x_t, u_1, \dots, u_r)),$$

wobei $u_1, \dots, u_r \in H$. Im allgemeinen kommen hier unendlich viele Definitionsgleichungen vor, ihre Mächtigkeit ist $H_0 + F$.

Es seien nun gewisse Ausgangsfunktionen angegeben. Die Elemente von H_0 (als Konstanten) und die Funktionen von F sollen jedenfalls Ausgangsfunktionen sein, es können aber auch andere Ausgangsfunktionen vorkommen. Dann wird eine Funktion (in den Ausgangsfunktionen) primitiv-rekursiv genannt, falls sie aus den Ausgangsfunktionen durch endlich viele Substitutionen und primitive Rekursionen entsteht. Dabei darf jede Funktion so betrachtet werden, als eine Funktion ihrer Argumente und beliebig (endlich) vieler „hinzugenommener“ Argumente, von denen sie nicht tatsächlich abhängt. Es soll

$b(y_1, \dots, y_r)$ die charakteristische Funktion einer Beziehung $B(y_1, \dots, y_r)$ heißen, wenn

$$b(y_1, \dots, y_r) = \begin{cases} h_0, & \text{falls } B(y_1, \dots, y_r) \text{ gilt,} \\ h_1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und eine Beziehung heißt primitiv-rekursiv, falls ihre charakteristische Funktion primitiv-rekursiv ist; hierbei bedeuten h_0 und h_1 zwei feste, sogleich zu bestimmende Elemente von H . (In den Weiteren werde ich die charakteristische Funktion einer mit B oder B_i bezeichneten Beziehung immer mit b bzw. mit b_i bezeichnen.)

Die Funktion $f(x) = x$ und die charakteristische Funktion der Gleichheit $x = y$ sollen als primitiv-rekursiv gelten, also notwendigerfalls zu den Ausgangsfunktionen hinzugenommen werden.

Man beweist leicht, daß die Klasse der (in gegebenen Ausgangsfunktionen) primitiv-rekursiven Funktionen davon unabhängig ist, in welcher Reihenfolge (und mit welcher Wiederholungen) die unmittelbaren Vorgänger von x durch $x_1, \dots, x_t$ bezeichnet worden sind.

5. Weder H_0 noch F ist leer; sei h_0 ein bestimmtes Element von H_0 und f_0 ein bestimmtes Element von F . Setzen wir ferner

$$h_1 = f_0(h_0, \dots, h_0), \quad h_2 = f_0(h_1, \dots, h_1), \dots,$$

dann ist 0 die Ordnung von h_0 , dann 1 die Ordnung von h_1 , ferner 2 die Ordnung von h_2 , usw.; so kann zu jeder natürlichen Zahl n ein Element h_n der Ordnung n angegeben werden.

Ich werde in den Folgenden $h_0, h_1, h_2, \dots$ mit den natürlichen Zahlen identifizieren (zum Beispiel verstehe ich unter dem „ h_n -ten“ Glied einer Folge das n -te Glied). So kann die Ordnung eines Elementes von H durch die primitive Rekursion

$$o(h) = h_0, \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und falls $x = f^*(\dots)$, wo $f^* \in F$ ist,

$$o(x) = f_0(o(x), \dots, o(\bar{x}))$$

definiert werden, wobei x ein beliebiger unmittelbarer Vorgänger von x ist. Einen bestimmten solchen Vorgänger hat man oft zu verwenden; sei x^{-1} ein solcher, wobei $h^{-1} = h$ ist, falls $h \in H_0$ (in diesem Fall ist h^{-1} ein nicht echter Vorgänger), und falls $x = f^*(x_1^*, \dots, x_m^*) \in H_{n+1}$, wobei $f^* \in F$ ist, dann sei $x^{-1} = x_i^*$, wobei x_i^* von $x_1^*, \dots, x_m^*$ dasjenige mit kleinstem Index ist, für welches $x_i^* \in H_n$ gilt.

x^{-1} soll als primitiv-rekursiv gelten, also notwendigerfalls zu den Ausgangsfunktionen hinzugenommen werden.⁵

6. Nun gilt der folgende

SATZ. Jede zahlentheoretische primitiv-rekursive Funktion kann zu einer primitiv-rekursiven Funktion in H erweitert werden.

BEWEIS. Offenbar genügt es zu beweisen, daß falls $q(n_1, \dots, n_r)$ eine zahlentheoretische primitiv-rekursive Funktion ist, und, wie gesagt,

$$0 = h_0, 1 = h_1, 2 = h_2, \dots$$

gesetzt wird (also h_{n+1} auch als $h_n + 1$ geschrieben werden kann, und allgemein eine zahlentheoretische Funktion $q(n)$ in jeder der Formen

$$q(n), h_{q(n)}, q(h_n), o(q(n)),$$

dann eine in H primitiv-rekursive Funktion $f(y_1, \dots, y_r)$ mit

$$o(f(y_1, \dots, y_r)) = q(o(y_1), \dots, o(y_r))$$

vorhanden ist. Die zahlentheoretischen primitiv-rekursiven Funktionen werden aus 0 und $n+1$ ausgehend durch endlich viele Substitutionen und primitive Rekursionen aufgebaut. Man hat also zu zeigen, daß die Behauptung 1. für 0 und $n+1$ gilt, und sich 2. bei Substitutionen und 3. bei primitiven Rekursionen vererbt.

1. Zu 0 kann in H die Konstante h_0 gehören, da

$$o(h_0) = h_0 = 0$$

ist.

Zu $n+1$ kann in H die Funktion $f_0(x, \dots, x)$ gewählt werden, da

$$o(f_0(x, \dots, x)) = o(x) + 1$$

ist.

2. Falls bereits

$$o(g(y_1, \dots, y_k)) = \psi(o(y_1), \dots, o(y_k))$$

und für $i = 1, \dots, k$

$$o(f_i(y_1, \dots, y_r)) = \varphi_i(o(y_1), \dots, o(y_r))$$

⁵ (a) Im Fall einer Wortemenge stimmt das mit dem in den Beispielen 2' und 2'' der Nr. 3 angegebenen x^{-1} überein.

(b) Wird im allgemeinen Fall die Reihenfolge $x_1, \dots, x_l$ der unmittelbaren Vorgänger von x etwa so gewählt, daß $x_1 = x_i^*$ gilt, so läßt sich x^{-1} durch die primitive Rekursion

$$h^{-1} = h, \text{ falls } h \in H_0,$$

und falls $x = f^*(\dots)$, wo $f^* \in F$,

$$x^{-1} = x_1$$

definieren.

gilt, wo ψ, φ_i zahlentheoretische Funktionen sind, so kann zur aus ihnen durch Substitution entstehenden Funktion

$$\psi(\varphi_1(n_1, \dots, n_r), \dots, \varphi_k(n_1, \dots, n_r))$$

in H die Funktion

$$g(f_1(y_1, \dots, y_r), \dots, f_k(y_1, \dots, y_r))$$

gewählt werden, da

$$\begin{aligned} o(g(f_1(y_1, \dots, y_r), \dots, f_k(y_1, \dots, y_r))) &= \\ = \psi(o(f_1(y_1, \dots, y_r)), \dots, o(f_k(y_1, \dots, y_r))) &= \\ = \psi(\varphi_1(o(y_1), \dots, o(y_r)), \dots, \varphi_k(o(y_1), \dots, o(y_r))) \end{aligned}$$

gilt.

3. Falls bereits

$$o(a(u_1, \dots, u_r)) = \alpha(o(u_1), \dots, o(u_r))$$

und

$$o(b(x, u_1, \dots, u_r, y)) = \beta(o(x), o(u_1), \dots, o(u_r), o(y))$$

gilt, wo α und β zahlentheoretische Funktionen sind, so kann zur Funktion $\varphi(n, p_1, \dots, p_r)$, welche durch die primitive Rekursion

$$\begin{aligned} \varphi(0, p_1, \dots, p_r) &= \alpha(p_1, \dots, p_r) \\ \varphi(n+1, p_1, \dots, p_r) &= \beta(n, p_1, \dots, p_r, \varphi(n, p_1, \dots, p_r)) \end{aligned}$$

definiert wird, in H die durch die primitive Rekursion

$$f(h, u_1, \dots, u_r) = a(u_1, \dots, u_r), \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und für $x = f^*(\dots)$, wo $f^* \in F$,

$$f(x, u_1, \dots, u_r) = b(x^{-1}, u_1, \dots, u_r, f(x^{-1}, u_1, \dots, u_r))$$

definierte Funktion $f(x, u_1, \dots, u_r)$ gewählt werden, da für $h \in H_0$

$$\begin{aligned} o(f(h, u_1, \dots, u_r)) &= o(a(u_1, \dots, u_r)) = \\ = \alpha(o(u_1), \dots, o(u_r)) &= \varphi(0, o(u_1), \dots, o(u_r)) = \varphi(o(h), o(u_1), \dots, o(u_r)) \end{aligned}$$

gilt; ferner falls für alle unmittelbaren Vorgänger x von $x \notin H_0$ bereits

$$o(f(\bar{x}, u_1, \dots, u_r)) = \varphi(o(\bar{x}), o(u_1), \dots, o(u_r))$$

gilt, so gilt auch

$$\begin{aligned} o(f(x, u_1, \dots, u_r)) &= o(b(x^{-1}, u_1, \dots, u_r, f(x^{-1}, u_1, \dots, u_r))) = \\ &= \beta(o(x^{-1}), o(u_1), \dots, o(u_r), o(f(x^{-1}, u_1, \dots, u_r))) = \\ &= \beta(o(x^{-1}), o(u_1), \dots, o(u_r), \varphi(o(x^{-1}), o(u_1), \dots, o(u_r))) = \\ &= \varphi(o(x^{-1}) + 1, o(u_1), \dots, o(u_r)) = \varphi(o(x), o(u_1), \dots, o(u_r)). \end{aligned}$$

7. Beispiele für Definitionen primitiv-rekursiver Funktionen in H .

1. $h_{o(e)} = o(x)$ wurde bereits als primitiv-rekursive Funktion definiert.
2. Die Definition von $x^{-o(y)}$:

$$x^{-o(h)} = x, \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und falls $y = f^*(...)$, wo $f^* \in F$,

$$x^{-o(y)} = (x^{-o(y^{-1})})^{-1}.$$

Das ergibt einen (nicht notwendig echten) Vorgänger von x , dessen Ordnung — falls die Ordnung von y nicht größer als die Ordnung von x ist — um die Ordnung von y kleiner als die Ordnung von x ist.⁶

3. Definition eines bestimmten (nicht notwendig echten) Vorgängers 0-ter Ordnung von x , mit $e(x)$ bezeichnet:

$$e(h) = h, \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und falls $x = f^*(...)$, wo $f^* \in F$,

$$e(x) = e(x^{-1}).$$

4. Definition der charakteristischen Funktion der Beziehung, daß x der Form $f_0^*(...)$ ist, wobei f_0^* ein bestimmtes Element von F ist (falls sie provisorisch mit f bezeichnet wird):

$$f(h) = h_1, \quad \text{falls } h \in H_0,$$

falls $x = f_0^*(...)$,

$$f(x) = h_0,$$

und falls $x = f^*(...)$, wo $f^* \in F$ von f_0^* verschieden ist,

$$f(x) = h_1.$$

5. Definition von $sg(x)$ (d. h. der charakteristischen Funktion von $x \in H_0$):

$$sg(h) = h_0, \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und falls $x = f^*(...)$, wo $f^* \in F$,

$$sg(x) = h_1.$$

6. Definition von $\overline{sg}(x)$ (d. h. der charakteristischen Funktion von $x \notin H_0$):

$$\overline{sg}(h) = h_1, \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und falls $x = f^*(...)$, wo $f^* \in F$,

$$\overline{sg}(x) = h_0.$$

⁶ Man sieht leicht, daß diese Funktion nicht von y , nur von $o(y)$ abhängig ist (dasselbe gilt auch in den Weiteren immer, wenn eine Funktion in Abhängigkeit von $o(...)$ definiert wird), ferner, daß sie für $o(y) = 1$ in x^{-1} übergeht.

dann sukzessiv die Funktionen

$$\begin{aligned} s_3(z_1, z_2, z_3) &= s_2(s_2(z_1, z_2), z_3), \\ s_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= s_2(s_3(z_1, z_2, z_3), z_4), \\ &\dots\dots\dots \\ s_{n+1}(z_1, \dots, z_{n+1}) &= s_2(s_n(z_1, \dots, z_n), z_{n+1}). \end{aligned}$$

Es gilt für $i=2, 3, \dots, n+1$ bei jedem $j=1, 2, \dots, i$

$$s_i(h_0, \dots, h_0, z_j, h_0, \dots, h_0) = z_j,$$

und so speziell

$$s_i(h_0, \dots, h_0) = h_0;$$

denn man entnimmt aus der Definition von $s_2(z_1, z_2)$ unmittelbar

$$s_2(z_1, h_0) = z_1, \quad s_2(h_0, z_2) = z_2,$$

und auch das benutzend geht diese Eigenschaft für $i=2, 3, \dots, n$ sukzessiv von $s_i(z_1, \dots, z_i)$ auf

$$s_{i+1}(z_1, \dots, z_{i+1}) = s_2(s_i(z_1, \dots, z_i), z_{i+1})$$

über.

Daraus ergibt sich, wenn eine Funktion $s_1(x, y)$ durch die primitive Rekursion

$$s_1(h_0, y) = y, \quad s_1(h, y) = h_0, \quad \text{falls } h \in H_0 \quad \text{und} \quad h \neq h_0,$$

und für $x=f^*(\dots)$, wo $f^* \in F$,

$$s_1(x, y) = h_0$$

definiert wird, unsere „zusammengeflochtene“ Funktion als

$$\begin{aligned} f(y_1, \dots, y_r) &= s_{n+1}(s_1(b_1(y_1, \dots, y_r), g_1(y_1, \dots, y_r)), \dots \\ &\dots, s_1(b_{n+1}(y_1, \dots, y_r), (g_{n+1}(y_1, \dots, y_r))). \end{aligned}$$

9. Definition der charakteristischen Funktion der Beziehung $y \in H_{o(x)}$ (provisorisch mit $g(x, y)$ bezeichnet):

$$g(h, y) = sg(y), \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und für $x=f^*(\dots)$, wo $f^* \in F$,

$$g(x, y) = \begin{cases} h_0, & \text{falls } sg(x^{-o(y)}) = h_0 \text{ \& } sg((f_0(x, \dots, x))^{-o(y)}) \neq h_0, \\ h_1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Einfacher ergibt sich diese Funktion durch Einsetzen von $o(x)$ für x und $o(y)$ für y in der charakteristischen Funktion der Gleichheit $x=y$.)

10. Definition der charakteristischen Funktion der Beziehung, daß die Ordnung von x größer als die Ordnung von y ist (provisorisch mit $f(x, y)$

8. Zur Untersuchung des Zusammenhangs der verschiedenen Rekursionsarten in H benötigt man als Hilfsmittel eine eindeutige Abbildung der Menge K der aus Elementen von H gebildeten endlichen (nicht leeren) Folgen auf eine Teilmenge von H . (Im zahlentheoretischen Fall kann z. B. einer Zahlenfolge $a_0, a_1, \dots, a_n$ die Zahl $p_0^{a_0} p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}$ zugeordnet werden, wobei $p_0, p_1, \dots$ die wachsende Folge der Primzahlen ist.) Da $h_0, h_1, h_2, \dots$ alle verschieden sind, ist H eine unendliche Menge, daher existieren nach bekannten mengentheoretischen Sätzen solche Abbildungen. (Zum allgemeinen Existenzbeweis wird auch der Wohlordnungssatz verwendet, aber die vorliegende allgemeine Theorie ist ohnehin nicht konstruktiv; außerdem können in den wichtigsten Spezialfällen — für abzählbares H , für H von der Mächtigkeit des Kontinuum, oder der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$, usw. — Abbildungen der gewünschten Art auch ohne Verwendung des Wohlordnungssatzes effektiv angegeben werden.)

Das Element von H , welches bei einer solchen Abbildung der Elementenfolge $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ entspricht, soll mit $c_n(y_0, y_1, \dots, y_n)$ bezeichnet werden; und falls ein $x \in H$ einer endlichen Elementenfolge entspricht, sei $\text{long}(x)$ die „Länge“ dieser Folge (genauer: n , falls die Folge $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ ist, also um 1 weniger als die Gliederzahl der Folge); und für $j = 0, 1, \dots, \text{long}(x)$ sei $k_j(x)$ das j -te Glied der Folge. Die Definitionen von $\text{long}(x)$ und $k_j(x)$ können verschiedenartig auch auf solche $x \in H$ ausgedehnt werden, welche keiner Elementenfolge entsprechen, und auch auf Werte $j > \text{long}(x)$; sogar auf beliebige von $h_0, h_1, h_2, \dots$ (die mit den natürlichen Zahlen identifiziert wurden) verschiedene $j \in H$; so wird $\text{long}(x)$ zu einer einstelligen, $k_j(x)$ zu einer zweistelligen Funktion in H , im bisher gebrauchten Sinne. Nach geeigneter Fixierung der Abbildung und der Ausdehnung der Definitionen sollen $\text{long}(x)$ und $k_j(x)$ — falls sie in H nicht als primitiv-rekursive Funktionen definiert werden können — zu den Ausgangsfunktionen von H hinzugenommen werden.

Nach den Definitionen gilt

$$\text{long}(c_n(y_0, y_1, \dots, y_n)) = n$$

und für $j = 0, 1, \dots, n$

$$k_j(c_n(y_0, y_1, \dots, y_n)) = y_j.$$

9. **Die Wertverlaufsrekursion.** Wir wollen nun Folgen aus den Vorgängern eines beliebigen $x \in H$ bilden. Für diese kann verschiedenartig eine vollständige Anordnung (etwa auch mit Wiederholungen) angegeben werden. Wir wählen ein für allemal die durch folgende Rekursion nach der Ordnung von x erklärte Anordnung. Für $o(x) = 0$ ist x selbst sein einziger Vorgänger. Nehmen wir an, daß für alle Elemente von x der Ordnung n die Anordnung ihrer Vorgänger schon definiert ist, und sei nun $o(x) = n + 1$. Dann haben

die unmittelbaren Vorgänger $x_1, \dots, x_t$ von x die Ordnung n , und sämtliche echten Vorgänger von x kommen nach V5 der Nr. 3 unter den — nach Annahme bereits geordneten — Vorgängern von $x_1, \dots, x_t$ vor. Man nehme nun zuerst die Vorgänger von x_1 in ihrer Reihenfolge, dann die von diesen verschiedenen Vorgänger von x_2 in ihrer Reihenfolge, usw., endlich die von den Vorgängern der Elemente $x_1, \dots, x_{t-1}$ verschiedenen Vorgänger von x_t in ihrer Reihenfolge, und zuletzt noch x . In den Weiteren werde ich die Vorgänger von x in dieser Reihenfolge mit

$$\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s$$

bezeichnen.

Der Wertverlauf einer Funktion $f(x, u_1, \dots, u_r)$ über die Vorgänger von x wird durch die Folge

$$f(\bar{x}_0, u_1, \dots, u_r), f(\bar{x}_1, u_1, \dots, u_r), \dots, f(\bar{x}_s, u_1, \dots, u_r),$$

also mit Benutzung der erwähnten Abbildung durch

$$\varphi(x, u_1, \dots, u_r) = c_s(f(\bar{x}_0, u_1, \dots, u_r), \dots, f(\bar{x}_s, u_1, \dots, u_r))$$

charakterisiert; diese Funktion soll die *Wertverlaufsfunktion* von f heißen. Daraus erhält man, falls $x \geq x$ und so $x = x_j$ mit einem $0 \leq j \leq s$ ist,

$$f(\bar{x}, u_1, \dots, u_r) = k_j(\varphi(x, u_1, \dots, u_r));$$

speziell für $j = s = \text{long}(\varphi(x, u_1, \dots, u_r))$

$$f(x, u_1, \dots, u_r) = k_{\text{long}(\varphi(x, u_1, \dots, u_r))}(\varphi(x, u_1, \dots, u_r)).$$

Damit sind wir in der Lage, die Wertverlaufsrekursion in H definieren zu können. Da handelt es sich um solche Rekursionen, wobei zur Definition des Funktionswertes an einer Stelle x Funktionswerte an echten, aber nicht notwendig unmittelbaren Vorgängern verwendet werden. Da sämtliche echten Vorgänger Vorgänger der unmittelbaren Vorgänger $x_1, \dots, x_t$ sind, und nach den Obigen der Wert von f an jedem Vorgänger eines x_i ($1 \leq i \leq t$) durch Anwendung von k_j bei geeignetem j auf $\varphi(x_i, u_1, \dots, u_r)$ angegeben werden kann, so kann als allgemeine Wertverlaufsrekursion die folgende Definition einer Funktion $f(x, u_1, \dots, u_r)$ angenommen werden:

$$f(h, u_1, \dots, u_r) = g_h(u_1, \dots, u_r), \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und für $x = f^*(...)$, wo $f^* \in F$,

$$(W) \quad f(x, u_1, \dots, u_r) = g_{f^*}(x_1, \dots, x_t, u_1, \dots, u_r, \varphi(x_1, u_1, \dots, u_r), \dots, \varphi(x_t, u_1, \dots, u_r)),$$

wobei $\varphi(x, u_1, \dots, u_r)$ die Wertverlaufsfunktion von $f(x, u_1, \dots, u_r)$ ist.

10. Um ähnlich wie im zahlentheoretischen Fall, auch allgemein die Wertverlaufsrekursion auf primitive Rekursion zurückzuführen, untersuchen wir zunächst eine „rekursionsartige Darstellbarkeit“ der Funktion $c_n(y_0, y_1, \dots, y_n)$ der Nr. 8. Sei $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ für $n \geq 1$ eine beliebige endliche Folge von Elementen aus H , und sei

$$x = c_{n-1}(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}), \quad y = c(y_n) = c_0(y_n),$$

dann gilt für $j = 0, 1, \dots, n-1$

$$y_j = k_j(x), \quad y_n = k_0(y), \quad n = \text{long}(x) + 1,$$

also

$$c_n(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) = c_{\text{long}(x)+1}(k_0(x), k_1(x), \dots, k_{\text{long}(x)}(x), k_0(y)).$$

Setzen wir für beliebige $x, y \in H$

$$p(x, y) = c_{\text{long}(x)+1}(k_0(x), k_1(x), \dots, k_{\text{long}(x)}(x), k_0(y)),$$

und nehmen wir $c(x)$ und $p(x, y)$ zu den Ausgangsfunktionen hinzu, falls sie in H nicht als primitiv-rekursive Funktionen definiert werden können. Dann gilt nach den Obigen für $n \geq 1$ die „rekursionsartige Darstellung“ von c_n :

$$c_n(y_0, y_1, \dots, y_n) = p(c_{n-1}(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}), c(y_n)).$$

Daraus ergibt sich, daß falls für die Folge $y_0, y_1, \dots, y_n$ die für $y = 0, 1, \dots, o(x)$ angenommenen Werte einer primitiv-rekursiven Funktion $\bar{f}(y, z_1, \dots, z_r)$ eingesetzt werden, dann die so entstehende Funktion

$$\bar{c}^f(x, z_1, \dots, z_r) = c_{o(x)}(\bar{f}(0, z_1, \dots, z_r), \bar{f}(1, z_1, \dots, z_r), \dots, \bar{f}(o(x), z_1, \dots, z_r))$$

primitiv-rekursiv ist, da sie durch folgende primitive Rekursion definiert werden kann:

$$\bar{c}^f(h, z_1, \dots, z_r) = c(\bar{f}(0, z_1, \dots, z_r)), \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und falls $x = f^*(\dots)$, wo $f^* \in F$,

$$\bar{c}^f(x, z_1, \dots, z_r) = p(\bar{c}^f(x^{-1}, z_1, \dots, z_r), c(\bar{f}(o(x), z_1, \dots, z_r))).$$

Für die Anwendungen ist nur die Existenz einer primitiv-rekursiven Funktion $p(x, y)$ mit dieser Eigenschaft wichtig.

11. Das werde ich nun zur rekursiven Definition der Wertverlaufsfunktion $\varphi(x, u_1, \dots, u_r)$ der durch (W) in Nr. 9 definierten Funktion $f(x, u_1, \dots, u_r)$ benutzen.

Nach V5 in Nr. 3 kommen sämtliche echten Vorgänger $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{s-1}$ eines Elementes $x (= \bar{x}_s)$ der Form $x = f^*(\dots)$, wo $f^* \in F$, unter den Vorgängern seiner unmittelbaren Vorgänger $x_1, \dots, x_t$ vor. Das kleinste Index i , für welches $\bar{x}_j$ bei einem $j < s$ ein Vorgänger von x_i ist, ferner das l , für welches

$\bar{x}_j$ der Vorgänger mit dem Index l in der festgelegten Reihenfolge der Vorgänger von x_i ist, endlich auch s sind von x abhängig, dies bedeutet aber offenbar nur eine Abhängigkeit von $x_1, \dots, x_t$: für Elemente mit denselben unmittelbaren Vorgängern stimmen sie überein. Es sind also bei jedem $f^* \in F$ diese i und l für Zahlenwerte $j < s$ Funktionen von $j, x_1, \dots, x_t$, und s ist eine Funktion von $x_1, \dots, x_t$, falls x der Form $x = f^*(\dots)$ ist. Jede dieser Funktionen nimmt nur Zahlenwerte an; i höchstens den Wert $t(f^*)$. Offenbar kann die Definition dieser Funktionen auf alle Elemente von H mit Beibehaltung dieser Eigenschaft ausgedehnt werden (an Stellen, wo sie bisher nicht definiert sind, kann man ihnen etwa den Wert h_0 zuordnen).

Seien also zu jedem $f^* \in F$

$$\sigma_{f^*}(z_1, \dots, z_{t(f^*)}), \quad \iota_{f^*}(y, z_1, \dots, z_{t(f^*)}), \quad \lambda_{f^*}(y, z_1, \dots, z_{t(f^*)})$$

in H definierten Funktionen, die nur Zahlenwerte annehmen (also mit ihrer eigenen Ordnung übereinstimmen), dabei ι_{f^*} höchstens den Wert $t(f^*)$; und so beschaffen sind, daß falls $x = f^*(\dots) \in H$ als unmittelbare Vorgänger $x_1, \dots, x_t$ besitzt, und j eine kleinere Zahl als $\sigma_{f^*}(x_1, \dots, x_t)$ ist, dann

$$\sigma_{f^*}(x_1, \dots, x_t), \quad \iota_{f^*}(j, x_1, \dots, x_t), \quad \lambda_{f^*}(j, x_1, \dots, x_t)$$

der Reihe nach die oben definierten Zahlen

$$s, \quad i, \quad l$$

ergeben. Diese Funktionen sollen — falls sie in H nicht als primitiv-rekursive Funktionen definiert werden können — zu den Ausgangsfunktionen hinzugenommen werden.

Nach der Bedeutung von s, i und l und nach Nr. 9 gilt nun für die Funktion $f(x, u_1, \dots, u_r)$ mit der Wertverlaufsfunktion $q(x, u_1, \dots, u_r)$ für ein $x = f^*(\dots) \in H$ mit den Vorgängern $x_0, \dots, \bar{x}_{s-1}, \bar{x}_s = x$ und mit den unmittelbaren Vorgängern $x_1, \dots, x_t$ für $j = 0, 1, \dots, s-1$

$$f(\bar{x}_j, u_1, \dots, u_r) = k_{\lambda_{f^*}(j, x_1, \dots, x_t)}(\varphi(x_{\iota_{f^*}(j, x_1, \dots, x_t)}, u_1, \dots, u_r)),$$

und daher

$$\begin{aligned} q(x, u_1, \dots, u_r) &= c_s(f(x_0, u_1, \dots, u_r), \dots, f(x_{s-1}, u_1, \dots, u_r), f(\bar{x}_s, u_1, \dots, u_r)) = \\ &= c_{\sigma_{f^*}(x_1, \dots, x_t)}(k_{\lambda_{f^*}(0, x_1, \dots, x_t)}(\varphi(x_{\iota_{f^*}(0, x_1, \dots, x_t)}, u_1, \dots, u_r)), \dots \\ &\dots, k_{\lambda_{f^*}(\sigma_{f^*}(\iota_{f^*}(x_1, \dots, x_t)-1, x_1, \dots, x_t)}(q(x_{\iota_{f^*}(\sigma_{f^*}(\iota_{f^*}(x_1, \dots, x_t)-1, x_1, \dots, x_t)}, u_1, \dots, u_r)), f(x, u_1, \dots, u_r))). \end{aligned}$$

Wird also

$$\begin{aligned} \bar{g}_{f^*}(z_1, \dots, z_t, v_0, v_1, \dots, v_t, w) &= c_{\sigma_{f^*}(z_1, \dots, z_t)}(k_{\lambda_{f^*}(0, z_1, \dots, z_t)}(v_{\iota_{f^*}(0, z_1, \dots, z_t)}), \dots \\ &\dots, k_{\lambda_{f^*}(\sigma_{f^*}(z_1, \dots, z_t)-1, z_1, \dots, z_t)}(v_{\iota_{f^*}(\sigma_{f^*}(z_1, \dots, z_t)-1, z_1, \dots, z_t)}), w) \end{aligned}$$

gesetzt, dann gilt (da ι_f^* zwar auch den Wert $h_0 = 0$ annehmen kann, aber in den uns interessierenden Fällen nie) etwa mit

$$g_{f^*}(z_1, \dots, z_t, v_1, \dots, v_t, w) = \bar{g}_{f^*}(z_1, \dots, z_t, h_0, v_1, \dots, v_t, w)$$

der Zusammenhang

$$(\bar{W}) \quad \varphi(x, u_1, \dots, u_r) = \bar{g}_{f^*}(x_1, \dots, x_t, \varphi(x_1, u_1, \dots, u_r), \dots, \varphi(x_t, u_1, \dots, u_r), f(x, u_1, \dots, u_r)).$$

12. Nach dem Schlußergebnis der Nr. 10 ist hier die Funktion g_{f^*} primitiv-rekursiv. Denn erstens ist für $t = t(f^*)$

$$\begin{aligned} v_{\iota_{f^*}}(y, z_1, \dots, z_t) &= v_{f^*}^*(y, z_1, \dots, z_t, v_0, v_1, \dots, v_t) = \\ &= \begin{cases} v_1, & \text{falls } \iota_{f^*}(y, z_1, \dots, z_t) = 1, \\ \dots & \dots \\ v_t, & \text{falls } \iota_{f^*}(y, z_1, \dots, z_t) = t, \\ v_0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

nach 8 der Nr. 7 eine primitiv-rekursive Funktion. Daher ist auch die durch

$$\bar{f}(y, z_1, \dots, z_t, v_0, v_1, \dots, v_t, w) = \begin{cases} k_{\lambda_{f^*}}(y, z_1, \dots, z_t)(v_{\iota_{f^*}}(y, z_1, \dots, z_t)), \\ \text{falls } o(\iota_{f^*}(y, z_1, \dots, z_t)) < o(\sigma_{f^*}(z_1, \dots, z_t)), \\ w & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion $\bar{f}$ primitiv-rekursiv, und mit ihr nach Nr. 10 auch die Funktion

$$\begin{aligned} c\bar{f}(x, z_1, \dots, z_t, v_0, v_1, \dots, v_t, w) &= \\ &= c_{o(x)}(\bar{f}(0, z_1, \dots, z_t, v_0, v_1, \dots, v_t, w), \dots, \bar{f}(o(x), z_1, \dots, z_t, v_0, v_1, \dots, v_t, w)). \end{aligned}$$

Man sieht aber leicht, daß

$$\bar{g}_{f^*}(z_1, \dots, z_t, v_0, v_1, \dots, v_t, w) = c\bar{f}(\sigma_{f^*}(z_1, \dots, z_t), z_1, \dots, z_t, v_0, v_1, \dots, v_t, w)$$

gilt; so ist auch $\bar{g}_{f^*}$, und daher auch die in $(\bar{W})$ der Nr. 11 auftretende Funktion $\bar{g}_{f^*}$ primitiv-rekursiv in H .

Sind auch die in der Definition (W) von Nr. 9 auftretenden Funktionen g_h und g_{f^*} primitiv-rekursiv in H , so gilt das auch für die Wertverlaufsfunktion

$$\varphi(x, u_1, \dots, u_r) = c_s(f(\bar{x}_0, u_1, \dots, u_r), \dots, f(\bar{x}_s, u_1, \dots, u_r)),$$

denn diese kann (in Betracht genommen, daß für $h \in H_0$ der einzige Vorgänger von h selbst h , und $c_0 = c$ ist) nach (W) und $(\bar{W})$ durch folgende primitive Rekursion definiert werden:

$$\varphi(h, u_1, \dots, u_r) = c(g_h(u_1, \dots, u_r)), \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und falls $x = f^*(...)$, wo $f^* \in F$,

$$\varphi(x, u_1, \dots, u_r) = \bar{g}_{f^*}(x_1, \dots, x_t, \varphi(x_1, u_1, \dots, u_r), \dots, \varphi(x_t, u_1, \dots, u_r), \\ g_{f^*}(x_1, \dots, x_t, u_1, \dots, u_t, \varphi(x_1, u_1, \dots, u_r), \dots, \varphi(x_t, u_1, \dots, u_r))).$$

Endlich ergibt sich $f(x, u_1, \dots, u_r)$ durch die Substitution

$$f(x, u_1, \dots, u_r) \doteq k_{\text{long}(\varphi(x, u_1, \dots, u_r))}(\varphi(x, u_1, \dots, u_r))$$

als primitiv-rekursive Funktion in H . Demnach führt die Wertverlaufsrekursion nicht von der Klasse der in H primitiv-rekursiven Funktionen heraus.

13. Reduktionen. 1. Bisher war auch schon mühsam, die vielen Parameter mitzuschleppen; und das ist auch nicht notwendig. In H lassen sich die Parameter zu einem einzigen zusammenziehen.

Wird $f(x, u_1, \dots, u_r)$ durch die primitive Rekursion

$$f(h, u_0, \dots, u_r) = g_h(u_0, \dots, u_r), \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und für $x = f^*(...)$, wo $f^* \in F$,

$$f(x, u_0, \dots, u_r) = g_{f^*}(x_1, \dots, x_t, u_0, \dots, u_r, f(x_1, u_0, \dots, u_r), \dots, f(x_t, u_0, \dots, u_r))$$

definiert, so sei

$$f'(x, u) = f(x, k_0(u), \dots, k_r(u)),$$

woraus sich

$$f(x, u_1, \dots, u_r) = f'(x, c_r(u_0, \dots, u_r))$$

ergibt.

f' kann durch folgende primitive Rekursion definiert werden:

$$f'(h, u) = g_h(k_0(u), \dots, k_r(u)) = g'_h(u), \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und für $x = f^*(...)$, wo $f^* \in F$,

$$\begin{aligned} f'(x, u) &= g_{f^*}(x_1, \dots, x_t, k_0(u), \dots, k_r(u), f(x_1, k_0(u), \dots, k_r(u)), \dots \\ &\quad \dots, f(x_t, k_0(u), \dots, k_r(u))) = \\ &= g_{f^*}(x_1, \dots, x_t, k_0(u), \dots, k_r(u), f'(x_1, u), \dots, f'(x_t, u)) = \\ &= g'_{f^*}(x_1, \dots, x_t, u, f'(x_1, u), \dots, f'(x_t, u)), \end{aligned}$$

wobei g'_h, g'_{f^*} mit g_h bzw. g_{f^*} primitiv-rekursiv sind.

Aus $f'(x, u)$ erhält man $f(x, u_0, \dots, u_r)$ durch die obige Substitution.

2. In H kann eine Rekursion der letzten Form noch weiter reduziert werden: auf eine Form, wobei die Abhängigkeit vom einzigen Parameter u nur im Fall $x \in H_0$ zum Ausdruck kommt.

Sei nämlich

$$f''(x, u) = c_1(u, f'(x, u)),$$

woraus sich

$$f'(x, u) = k_1(f''(x, u)),$$

und für beliebiges x (also zum Beispiel auch für x^{-1} statt x)

$$u = k_0(f''(x, u))$$

ergibt.

So gewinnt man folgende primitiv-rekursive Definition für $f''(x, u)$:

$$f''(h, u) = c_1(u, g'_h(u)), \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und für $x = f^*(\dots)$, wo $f^* \in F$,

$$f''(x, u) = c_1(k_0(f''(x^{-1}, u)), g'_{f^*}(x_1, \dots, x_t, k_0(f''(x^{-1}, u)), \\ k_1(f''(x_1, u)), \dots, k_1(f''(x_t, u)))).$$

Aus $f''(x, u)$ erhält man $f'(x, u)$ durch die obige Substitution.

Demnach kann man sich in H , von den bereits angenommenen Ausgangsfunktionen ausgehend, nebst Substitutionen auf primitive Rekursionen der Form

$$f(h, u) = g_h(u), \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und falls $x = f^*(\dots)$, wo $f^* \in F$,

$$f(x, u) = g_{f^*}(x_1, \dots, x_t, f(x_1, u), \dots, f(x_t, u))$$

beschränken.

14. Die simultane Rekursion für mehrere Funktionen. Diese läßt sich auf eine primitive Rekursion in H nebst Substitutionen zurückführen. Das zeige ich an einem Beispiel; der allgemeine Fall könnte aber genau so behandelt werden.

Sei

$$f'(h, u) = g'_h(u), \quad f''(h, u) = g''_h(u), \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und für $x = f^*(\dots)$, wo $f^* \in F$,

$$f'(x, u) = g'_{f^*}(x_1, f'(x_1, u), f''(x_2, u)), \quad f''(x, u) = g''_{f^*}(x_2, f'(x_3, u)),$$

wo x_1, x_2, x_3 unmittelbare Vorgänger von x sind.

Setzen wir

$$\bar{f}(x, u) = c_1(f'(x, u), f''(x, u)),$$

woraus sich

$$f'(x, u) = k_0(\bar{f}(x, u)) \quad \text{und} \quad f''(x, u) = k_1(\bar{f}(x, u))$$

ergibt.

$\bar{f}(x, u)$ kann dabei durch folgende primitive Rekursion definiert werden:

$$\bar{f}(h, u) = c_1(g'_h(u), g''_h(u)), \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und für $x = f^*(...)$, wo $f^* \in F$,

$$\bar{f}(x, u) = c_1(g_{f^*}'(x_1, k_0(\bar{f}(x_1, u)), k_1(\bar{f}(x_2, u))), g_{f^*}''(x_2, k_0(f(x_3, u)))).$$

Damit ist die Behauptung für dieses Beispiel bewiesen.

15. Die eingeschachtelte Rekursion. Hier handelt es sich um Rekursionen, wobei für die Parameter Einsetzungen erfolgen; sogar Werte der zu definierenden Funktion (an unmittelbare-Vorgänger-Stellen) können für die Parameter eingesetzt werden. Ich behandle hier ebenfalls ein Beispiel, aber mit allgemein ebenso verwendbaren Methoden.

Sei das betrachtete Beispiel die Definition:

$$f(h, u) = g_h(u), \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und für $x = f^*(...)$, wo $f^* \in F$,

$$f(x, u) = g_{f^*}(x_1, x_2, u, f(x_1, f(x_2, l_{f^*}(x_1, x_2, u)))),$$

wo x_1, x_2 unmittelbare Vorgänger von x , und die Funktionen g_h, g_{f^*}, l_{f^*} in H primitiv-rekursiv sind.

Bei der Berechnung der Werte von $f(x, u)$ sieht man, daß dabei „Ineinander-schachtelungen“ der Funktionen g_h, g_{f^*}, l_{f^*} als „Bausteine“ auftreten; dabei erfolgt in die beiden ersten Leerstellen der Funktionen g_{f^*} und l_{f^*} niemals eine Einsetzung einer Funktion. Eine Funktion $f(x, u)$, welche die folgenden Bedingungen erfüllt, würde sämtliche „Bausteine“ als Werte annehmen:

1. $f(x, u)$ nimmt für ein x den Wert u an,
2. es gibt zu jedem $h \in H_0$ und $y \in H$ ein $x \in H$ mit

$$\bar{f}(x, u) = g_h(\bar{f}(y, u)),$$

3. es gibt zu jedem $f^* \in F$ und $y_1, y_2, y_3, y_4 \in H$ ein $x \in H$ mit

$$\bar{f}(x, u) = g_{f^*}(y_1, y_2, \bar{f}(y_3, u), \bar{f}(y_4, u)),$$

4. es gibt zu jedem $f^* \in F$ und $y_1, y_2, y_3 \in H$ ein $x \in H$ mit

$$f(x, u) = l_{f^*}(y_1, y_2, \bar{f}(y_3, u)).$$

Falls dabei y, y_1, y_2, y_3, y_4 immer echte Vorgänger von x sind, erhält man aus diesen Forderungen eine rekursive Definition für eine geeignete Funktion $f(x, u)$.

16. Im zahlentheoretischen Fall könnte z. B. als für 3. geeignetes x die der Folge (y_1, y_2, y_3, y_4) zugeordnete Zahl $p_1^{y_1} p_2^{y_2} p_3^{y_3} p_4^{y_4}$ gewählt werden; umgekehrt, bei gegebenem x wären die Werte y_1, y_2, y_3, y_4 die Exponenten von p_1, p_2, p_3, p_4 in der Primfaktorenzerlegung von x , und diese wären (als kleinere

Zahlen) sicher echte Vorgänger von x . Diesen Exponenten entsprechen im allgemeinen Fall die Werte $k_1(x), k_2(x), k_3(x), k_4(x)$. In der (unter anderem) durch $k_{o(y)}(x)$ charakterisierten Abbildung kann aber vorkommen, daß eine eingliedrige Folge auf sich selbst abgebildet wird; deshalb kann für $k_{o(y)}(x)$ allgemein nicht die Forderung gestellt werden, daß es ein echter Vorgänger von x sei. Es hilft aber auch die schwächere Forderung, daß $k_{o(y)}(x)$ stets Vorgänger von x sei.

Die folgenden Betrachtungen gelten also nur dann, wenn die verwendete Abbildung der endlichen Elementenfolgen in H so beschaffen ist, daß stets

$$(K) \quad k_{o(y)}(x) \preceq x$$

gilt, woraus sich für ein beliebiges $\bar{x} \prec x$

$$k_{o(y)}(\bar{x}) \prec x$$

ergibt. D. h. die folgenden Betrachtungen gelten nur dann für eine angeordnete freie holomorphe Menge H , wenn es eine solche Abbildung der endlichen Elementenfolgen in H gibt, daß bei beliebigen $y_0, y_1, \dots, y_n \in H$ für das ihrer Folge zugeordnete Element $c_n(y_0, y_1, \dots, y_n)$

$$y_0 \preceq c_n(y_0, \dots, y_n), y_1 \preceq c_n(y_0, \dots, y_n), \dots, y_n \preceq c_n(y_0, \dots, y_n)$$

gilt. Auch bei der Ausdehnung des Definitionsbereiches von $k_j(x)$ (dessen Wert, falls $x \in H$ einer endlichen Elementenfolge von H entspricht, und $j < \text{long}(x)$ ist, das j -te Glied dieser Folge ist) auf alle Elemente von H , hat man auf die Bedingung (K) zu achten; das kann so geschehen, daß dieser Funktion an allen neu hinzugenommenen Stellen der Wert $e(x)$ zugeordnet wird.

Bei geeigneter Definition des Vorgängerbegriffes kann die Bedingung (K) für die in den Anwendungen wichtige Rolle erhaltenden speziellen freien holomorphen Mengen erfüllt werden. Die geeignete Definition des Vorgängerbegriffes ist aber wesentlich. Z. B. im Fall einer Wortemenge über einem Alphabet liegt es an der Hand einer Wortefolge jenes Wort zuzuordnen, welches durch das Nacheinandersetzen der mit durch geeignete „Trennzeichen“ getrennten Worte der Folge entsteht. Nun sind die einzelnen Worte der Folge keine „Anfangstücke“, nur „Abschnitte“ des so entstehenden Wortes; daher wird die Bedingung (K) im Fall des Beispiels 2' in Nr. 3 nicht erfüllt; im Fall des Beispiels 2'' dagegen kann sie erfüllt werden.

17. Von nun an nehmen wir an, daß in H die Bedingung (K) erfüllt ist. Dann kann eine Funktion $\bar{f}(x, u)$ wie folgt rekursiv definiert werden (da man die Funktion $k_{o(y)}(x)$ auch zu Fallunterscheidungen gebrauchen kann):

$$\bar{f}(h, u) = u, \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und für $x = f^*(\dots)$, wo $f^* \in F$,

$$f(x, u) = \begin{cases} g_h(\bar{f}(k_1(x_1), u)), & \text{falls } k_0(x_1) = h \in H_0, \\ g_{f^*}(k_1(x_1), k_2(x_1), \bar{f}(k_3(x_1), u), \bar{f}(k_4(x_1), u)), & \text{falls } k_0(x_1) \in H_1, \\ l_{f^*}(k_1(x_1), k_2(x_1), \bar{f}(k_3(x_1), u)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man sieht, daß diese Funktion $f(x, u)$ den Wert u annimmt, und auch die Forderungen 2., 3., 4. in Nr. 15 erfüllt; genauer:

(2) Für jedes $h \in H_0$, $y \in H$ und

$$x = f_0(c_1(h, y), \dots, c_1(h, y))$$

gilt

$$\bar{f}(x, u) = g_h(\bar{f}(y, u)),$$

(3) für jedes $f^* \in F$; $y_1, y_2, y_3, y_4 \in H$ und

$$x = f^*(c_4(h_1, y_1, y_2, y_3, y_4), \dots, c_4(h_1, y_1, y_2, y_3, y_4))$$

gilt

$$\bar{f}(x, u) = g_{f^*}(y_1, y_2, \bar{f}(y_3, u), \bar{f}(y_4, u)),$$

(4) für jedes $f^* \in F$; $y_1, y_2, y_3 \in H$ und

$$x = f^*(c_3(h_2, y_1, y_2, y_3), \dots, c_3(h_2, y_1, y_2, y_3))$$

gilt

$$\bar{f}(x, u) = l_{f^*}(y_1, y_2, \bar{f}(y_3, u)).$$

18. Prüfen wir nach, ob die Definition von $\bar{f}(x, u)$ ein Spezialfall der allgemeinen Wertverlaufsrekursion ist. Es treten darin für gewisse i Funktionswerte $\bar{f}(k_i(x_1), u)$ auf. Nach (K) gilt

$$k_i(x_1) < x_1.$$

Sei $k_i(x_1)$ der Vorgänger mit dem Index i von x_1 . Dann gilt nach Nr. 9, wenn die Wertverlaufsfunction von $\bar{f}(x, u)$ mit $q(x, u)$ bezeichnet wird,

$$\bar{f}(k_i(x_1), u) = k_i(q(x_1, u)).$$

Um die Definition von $f(x, u)$ und ähnliche Definitionen auf primitive Rekursion zurückführen zu können, hätte man (bei jedem festen f^* , falls x der Form $x = f^*(\dots)$ ist) dieses i als Funktion von $i, x_1, \dots, x_i$ zu bestimmen (und zwar als primitiv-rekursive Funktion). Ihr Definitionsbereich kann wie üblich auf alle Elemente von H ausgedehnt werden; und die so erhaltene Funktion soll — falls sie nicht als primitiv-rekursive Funktion in H definiert werden kann — zu den Ausgangsfunktionen hinzugenommen werden.

Dann sieht man leicht, daß die Definition von $f(x, u)$ ein Spezialfall der allgemeinen Wertverlaufsrekursion ist, und daher ist $f(x, u)$ eine primitiv-rekursive Funktion.

19. Die eingeschachtelten $\bar{f}$ -Ausdrücke können aufgelöst werden, im folgenden Sinne. Es gilt der

HILFSSATZ. Durch eine Wertverlaufsrekursion kann eine Funktion $r(x, y)$ definiert werden, für die stets

$$\bar{f}(x, \bar{f}(y, u)) = \bar{f}(r(x, y), u)$$

gilt.

BEWEIS DES HILFSSATZES. Erstens gilt für $h \in H_0$ stets

$$\bar{f}(h, \bar{f}(y, u)) = \bar{f}(y, u),$$

so gilt die Behauptung für $h \in H_0$, wenn

$$r(h, y) = y \quad \text{für } h \in H_0$$

gesetzt wird.

Angenommen, daß für alle x -Werte höchstens n -ter Ordnung $r(x, y)$ bereits im Sinne des Hilfssatzes definiert wurde, dann gilt für ein beliebiges $x = f^*(\dots)$ von $n+1$ -ter Ordnung, wobei $f^* \in F$,

$$\bar{f}(x, \bar{f}(y, u)) = \begin{cases} g_h(\bar{f}(r(k_1(x_1), y), u)), & \text{falls } k_0(x_1) = h \in H_0, \\ g_{f^*}(k_1(x_1), k_2(x_1), \bar{f}(r(k_3(x_1), y), u), & \\ \bar{f}(r(k_4(x_1), y), u)), & \text{falls } k_0(x_1) \in H_1, \\ l_{f^*}(k_1(x_1), k_2(x_1), \bar{f}(r(k_3(x_1), y), u)) & \text{sonst} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \bar{f}(f_0(c_1(h, r(k_1(x_1), y)), \dots, c_1(h, r(k_1(x_1), y))), u), & \text{falls } k_0(x_1) = h \in H_0, \\ \bar{f}(f^*(c_4(h_1, k_1(x_1), k_2(x_1), r(k_3(x_1), y), r(k_4(x_1), y)), \dots, \\ \dots, c_4(h_1, k_1(x_1), k_2(x_1), r(k_3(x_1), y), r(k_4(x_1), y))), u), & \text{falls } k_0(x_1) \in H_1, \\ \bar{f}(f^*(c_3(h_2, k_1(x_1), k_2(x_1), r(k_3(x_1), y)), \dots, c_3(h_2, k_1(x_1), k_2(x_1), \\ r(k_3(x_1), y))), u) & \text{sonst,} \end{cases}$$

also kann für $x = f^*(\dots)$, wo $f^* \in F$,

$$r(x, y) = \begin{cases} f_0(c_1(h, r(k_1(x_1), y)), \dots, c_1(h, r(k_1(x_1), y))), & \text{falls } k_0(x_1) = h \in H_0, \\ f^*(c_4(h_1, k_1(x_1), k_2(x_1), r(k_3(x_1), y), r(k_4(x_1), y)), \dots, c_4(h_1, k_1(x_1), \\ k_2(x_1), r(k_3(x_1), y), r(k_4(x_1), y))), & \text{falls } k_0(x_1) \in H_1, \\ f^*(c_3(h_2, k_1(x_1), k_2(x_1), r(k_3(x_1), y)), \dots, c_3(h_2, k_1(x_1), k_2(x_1), \\ r(k_3(x_1), y))) & \text{sonst} \end{cases}$$

dem Hilfssatz entsprechend definiert werden. Damit erhält man mit der bereits angegebenen Definition von $r(h, y)$ für $h \in H_0$ nach (K) ähnlich wie in Nr. 17—18 für $\bar{f}(x, u)$ eine Wertverlaufsrekursion für $r(x, y)$, und so ist $r(x, y)$ primitiv-rekursiv.

20. Der Hilfssatz ermöglicht die Werte von $f(x, u)$ aus den Werten von $\bar{f}(x, u)$ herauszuschöpfen. Es gilt nämlich die

BEHAUPTUNG: Es gibt eine primitiv-rekursive Funktion $s(x)$, so daß für jedes $x \in H$

$$f(x, u) = \bar{f}(s(x), u)$$

gilt.

BEWEIS DER BEHAUPTUNG. Für $h \in H_0$ gilt

$$f(h, u) = g_h(u) = g_h(\bar{f}(h_0, u)) = \bar{f}(f_0(c_1(h, h_0), \dots, c_1(h, h_0)), u),$$

also gilt die Behauptung für $x = h \in H_0$, wenn

$$s(h) = f_0(c_1(h, h_0), \dots, c_1(h, h_0)), \quad \text{falls } h \in H_0$$

definiert wird.

Angenommen, daß für die Stellen x der Ordnung n die Funktion $s(x)$ der Behauptung entsprechend definiert ist, gilt bei $x = f^*(\dots)$ der Ordnung $n+1$, wo $f^* \in F$,

$$\begin{aligned} f(x, u) &= g_{f^*}(x_1, x_2, f(h_0, u), \bar{f}(s(x_1)), \bar{f}(s(x_2)), l_{f^*}(x_1, x_2, \bar{f}(h_0, u)))) = \\ &= g_{f^*}(x_1, x_2, \bar{f}(h_0, u), \bar{f}(s(x_1)), \bar{f}(s(x_2)), \bar{f}(f^*(c_3(h_2, x_1, x_2, h_0), \dots \\ &\quad \dots, c_3(h_2, x_1, x_2, h_0))), u))) = \\ &= g_{f^*}(x_1, x_2, \bar{f}(h_0, u), \bar{f}(s(x_1)), \bar{f}(r(s(x_2)), f^*(c_3(h_2, x_1, x_2, h_0), \dots \\ &\quad \dots, c_3(h_2, x_1, x_2, h_0))), u))) = \\ &= g_{f^*}(x_1, x_2, \bar{f}(h_0, u), \bar{f}(r(s(x_1)), r(s(x_2)), f^*(c_3(h_2, x_1, x_2, h_0), \dots \\ &\quad \dots, c_3(h_2, x_1, x_2, h_0))))), u)) = \\ &= \bar{f}(f^*(c_4(h_1, x_1, x_2, h_0, r(s(x_1)), r(s(x_2)), f^*(c_3(h_2, x_1, x_2, h_0), \dots \\ &\quad \dots, c_3(h_2, x_1, x_2, h_0))))), \dots, c_1(h_1, x_1, x_2, h_0, r(s(x_1), r(s(x_2)), f^*(c_3(h_2, x_1, x_2, h_0), \dots \\ &\quad \dots, c_3(h_2, x_1, x_2, h_0))))), u), \end{aligned}$$

und daher wird $s(x)$ für $x = f^*(\dots)$, wo $f^* \in F$, durch

$$s(x) = f^*(c_4(h_1, x_1, x_2, h_0, r(s(x_1)), r(s(x_2)), f^*(c_3(h_2, x_1, x_2, h_0), \dots \\ \dots, c_3(h_2, x_1, x_2, h_0))))), \dots$$

$\dots, c_1(h_1, x_1, x_2, h_0, r(s(x_1), r(s(x_2)), f^*(c_3(h_2, x_1, x_2, h_0), \dots, c_3(h_2, x_1, x_2, h_0))))))$ der Behauptung entsprechend definiert. Das ergibt mit der obigen Definition von $s(h)$ für $h \in H_0$ eine primitive Rekursion für $s(x)$.

Samt $s(x)$ ist aber wegen

$$f(x, u) = \bar{f}(s(x), u)$$

auch $f(x, u)$ primitiv-rekursiv.

Falls die Bedingung (K) erfüllt ist, können sämtliche eingeschachtelten Rekursionen in H genau so auf primitive Rekursionen aufgelöst werden.

21. Ähnlich könnte man die Analogien mit den anderen, für den zahlen-theoretischen Fall bekannten Rekursionsarten verfolgen; nun gehe ich aber auf die *Definition der allgemein-rekursiven (und der partiell-rekursiven) Funktion* in H über.

Ich setze voraus, für jedes Element h von H_0 sei ein entsprechendes Zeichen für h (für verschiedene Elemente von H_0 verschiedene Zeichen) vorhanden; ich nenne diese Zeichen die *Konstanten*. Ferner sei für jede der (nichtkonstanten) Ausgangsfunktionen je ein entsprechendes von den Konstanten verschiedenes Zeichen (für verschiedene Ausgangsfunktionen verschiedene Zeichen) vorhanden; ich nenne sie *Funktionszeichen*. Für jedes Funktionszeichen ist dann die Anzahl der Argumente der durch ihm bezeichneten Funktion, kurz die Argumentenzahl des fraglichen Funktionszeichens, gegeben. Es sei auch eine abzählbar unendliche Folge von — von den Konstanten und Funktionszeichen verschiedenen — Zeichen, *Variable* genannt, ferner eine abzählbar unendliche Folge von — von den Konstanten, Variablen und Funktionszeichen verschiedenen — Zeichen, *Funktionsvariable* genannt, vorhanden. Zu jeder Funktionsvariablen sei eine positive ganze Zahl, die Argumentenzahl dieser Funktionsvariablen, zugeordnet derart, daß jede positive ganze Zahl die Argumentenzahl von unendlich vielen Funktionsvariablen ist. (Die Variablen werden die Elemente von H durchlaufen, die Funktionsvariablen werden auf H oder auf einer Teilmenge von H definierte, Elemente von H als Werte annehmende Funktionen mit der entsprechenden Anzahl von Argumenten bezeichnen, nämlich zu definierende Funktionen oder in die Definition eingehende Hilfsfunktionen.) Gewisse, aus Konstanten, Variablen, Funktionszeichen, Funktionsvariablen, Klammern und Kommata bestehende endliche Zeichenreihen werden *Terme* genannt, nämlich: jede Konstante und jede Variable ist ein Term, ferner, falls $t_1, \dots, t_r$ bereits Terme sind, so sei jede Zeichenreihe $\hat{f}(t_1, \dots, t_r)$, wo $\hat{f}$ ein Funktionszeichen oder eine Funktionsvariable mit der Argumentenzahl r ist, ebenfalls ein Term (und keine sonstige Zeichenreihe soll als Term gelten). Zu den bereits auf gezählten Zeichen nehmen wir noch das Gleichheitszeichen „ $=$ “ hinzu; eine Zeichenreihe $t_1 = t_2$, wobei t_1 und t_2 Terme sind, wird eine Gleichung, und eine beliebige (eventuell unendliche) Menge von Gleichungen ein Gleichungssystem genannt.

Jedes Element x von H entsteht in eindeutiger Weise aus endlich vielen Elementen von H_0 durch endlichvielmale Anwendung von Funktionen aus F . Werden die diese Funktionen (die ja unter den Ausgangsfunktionen vorkommen) bezeichnenden Funktionszeichen entsprechend auf die jene Elemente von H_0 bezeichnenden Konstanten angewandt, so entsteht ein Term, den ich als

das dem Element x entsprechende (oder das Element x bezeichnende) *Elemententerm* bezeichne. Für $h \in H_0$ ist unter dem das Element h bezeichnenden Elemententerm die entsprechende Konstante zu verstehen.

Ein Gleichungssystem $\mathfrak{G}$ wird das *definierende Gleichungssystem* einer auf einer Teilmenge von H (eventuell auf H) definierten und Elemente von H als Werte annehmenden Funktion $f(y_1, \dots, y_r)$ genannt, falls es für eine geeignete Funktionsvariable $\dot{f}$ mit der Argumentenzahl r und für beliebige $y_1, \dots, y_r, y \in H$ dann und nur dann eine Ableitung aus $\mathfrak{G}$ mit einem Endgleichung der Form

$$\dot{f}(y_1, \dots, y_r) = y$$

gibt, wo $y_1, \dots, y_r$ und y die den Elementen $y_1, \dots, y_r, y$ von H entsprechenden Elemententerme sind, falls $f(y_1, \dots, y_r)$ definiert ist und gleich dem Element y ist. Dabei bedeutet eine Ableitung aus einem Gleichungssystem $\mathfrak{G}$ die endlichmalige Anwendung der folgenden Schritte, von den Gleichungen des gegebenen Systems $\mathfrak{G}$ ausgehend:

1. Das Einsetzen eines Elemententermes für eine Variable in einer Gleichung, überall, wo diese Variable auftritt.

2. Falls die Gleichungen $a = b$ und $c = d$ bereits in der Ableitung vorgekommen sind (eventuell zum Gleichungssystem $\mathfrak{G}$ gehören), dann die Ersetzung in $a = b$ eines Teiltermes c durch d (auf einer oder mehreren Stellen).

Eine auf einer Teilmenge von H bzw. auf H definierte Funktion, wofür ein definierendes Gleichungssystem existiert, heißt eine partiell-rekursive bzw. eine allgemein-rekursive Funktion. In beiden Fällen wird also verlangt, daß für zwei Gleichungen der Form

$$\dot{f}(y_1, \dots, y_r) = y, \quad \dot{f}(y_1, \dots, y_r) = y'$$

mit dem obigen (die zu definierende partiell-rekursive bzw. allgemein-rekursive Funktion f bezeichnenden) Funktionsvariablen $\dot{f}$ und mit Elemententermen $y_1, \dots, y_r, y$ und y' , die Endgleichungen von Ableitungen aus dem definierenden Gleichungssystem von f sind, y mit y' übereinstimmen soll; und im Fall einer allgemein-rekursiven Funktion f wird auch verlangt, daß es für beliebige Elemententerme $y_1, \dots, y_r$ ein Elemententerm y geben soll, wofür die Gleichung $\dot{f}(y_1, \dots, y_r) = y$ die Endgleichung einer Ableitung aus dem definierenden Gleichungssystem von f ist.

Im folgenden werde ich einfachheitshalber die Konstanten, Elemententerme, Funktionszeichen und Funktionsvariablen manchmal nicht von den durch sie bezeichneten Elementen von H_0 und H , Ausgangsfunktionen bzw. zu definierenden Funktionen oder Hilfsfunktionen unterscheiden, was wohl nie zu einem Mißverständnis führen kann.

22. Bemerkungen. (1) Enthält F wenigstens eine mindestens zweistellige Funktion (was bei einer Wortmenge nicht der Fall ist), dann kann einer beliebigen endlichen Folge von Elementen aus H in einfacher Weise ein Element von H derart zugeordnet werden, daß daraus die Glieder der Folge wiederzuerkennen sind.

Sei nämlich $f_1(x_1, \dots, x_m) \in F$ mit $m \geq 2$, und setzen wir

$$f_1(x, y) = f_1(x, y, \dots, y).$$

Nach Annahme sind für ein $x = f^*(x_1^*, \dots, x_m^*)$, wo $f^* \in F$, die Funktion f^* und die Argumente $x_1^*, \dots, x_m^*$ eindeutig bestimmt. Die Funktionen $g_i(x)$ für $i=1, 2, \dots, m$, wobei $g_i(x)$ für $x = f_1(y_1, \dots, y_i, \dots, y_m)$ den Wert y_i und sonst den Wert h_0 annimmt, können leicht als primitiv-rekursive Funktionen in H definiert werden.

Nun kann einem geordneten Paar (x, y) das Element $f_1(x, y)$ zugeordnet werden, woraus die Glieder des Pairs als

$$g_1(f_1(x, y)) = x, \quad g_2(f_1(x, y)) = y$$

wiedererhalten werden können. Durch wiederholte Paarbildung kann einer beliebigen endlichen Folge ebenfalls ein einziges Element zugeordnet werden, woraus die Glieder der Folge wiederzuerkennen sind. Es ist aber zweckmäßiger ebenfalls durch Paarbildung zu bezeichnen, um wievielttes Glied es sich handelt, denn so erkennt man aus dem einer endlichen Folge zugeordneten Element sofort, wievieltgliedrig die betreffende Folge ist.

Seien also den Folgen

$$\begin{aligned} &x_0 \\ &x_0, x_1 \\ &x_0, x_1, x_2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

der Reihe nach die Elemente

$$\begin{aligned} &f_1(x_0, h_0) \\ &f_1(f_1(x_0, h_0), f_1(x_1, h_1)) \\ &f_1(f_1(f_1(x_0, h_0), f_1(x_1, h_1)), f_1(x_2, h_2)) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

zugeordnet.

Dann sieht man gleich, daß falls x einer endlichen Folge zugeordnet ist, so der Höchstindex der Glieder $x_0, x_1, \dots$ dieser Folge gleich

$$\overline{\text{long}}(x) = g_2(g_2(x))$$

ist. Für andere x kann $\overline{\text{long}}(x) = h_0$ definiert werden. Man hat aber noch diese Fallunterscheidung zu charakterisieren.

Erst sei $\text{ch}_{o(y)}(x)$ die charakteristische Funktion der Beziehung, daß x einer Folge

$$x_0, x_1, \dots, x_{o(y)}$$

zugeordnet ist. Diese kann (nach 4. von Nr. 7) als primitiv-rekursive Funktion von x und y definiert werden: für $h \in H_0$ sei

$$\text{ch}_{o(y)}(x) = \begin{cases} h_0, & \text{falls } x \text{ von der Form } x = f_1(\dots) \text{ ist} \\ & \text{und } g_2(x) = g_3(x) = \dots = g_m(x) = h_0, \\ h_1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und wenn $y = f^*(\dots)$, wo $f^* \in F$ ist, so

$$\text{ch}_{o(y)}(x) = \begin{cases} h_0, & \text{falls } x, g_2(x), g_3(x), \dots, g_m(x) \text{ von der Form } f_1(\dots) \text{ sind,} \\ & g_2(x) = g_3(x) = \dots = g_m(x), \\ & \text{ch}_{o(y-1)}(g_1(x)) = h_0 \text{ und } g_2(g_2(x)) = h_{o(y)}, \\ h_1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist die charakteristische Funktion $\overline{\text{ch}}(x)$ der Beziehung, daß x überhaupt einer endlichen Folge $x_0, x_1, \dots, x_i$ zugeordnet ist (da dann $g_2(g_2(x)) = h_i$ ist):

$$\overline{\text{ch}}(x) = \text{ch}_{o(y_2(g_2(x)))}(x),$$

und damit ist auch

$$\overline{\text{long}}(x) = \begin{cases} g_2(g_2(x)), & \text{falls } \overline{\text{ch}}(x) = h_0, \\ h_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

primitiv-rekursiv.

Aus dem der Folge x_0, x_1, x_2 zugeordneten Element

$$x = f_1(f_1(f_1(x_0, h_0), f_1(x_1, h_1)), f_1(x_2, h_2))$$

ergibt sich

$$x_2 = g_1(g_2(x)), \quad x_1 = g_1(g_2(g_1(x))), \quad x_0 = g_1(g_1(g_1(x))).$$

und man sieht leicht, daß allgemein für $\overline{\text{ch}}(x) = h_0$, mit Verwendung der leicht als primitiv-rekursiv definierbaren Funktion

$$g_1^{o(y)}(x) = \underbrace{g_1(g_1(\dots(g_1(x))\dots))}_{o(y)\text{-mal}},$$

das Glied mit dem Index $\text{long}(x) \cdot o(y)$ der zu x gehörigen Folge für $o(y) < \overline{\text{long}}(x)$ gleich

$$g_1(g_2(g_1^{o(y)}(x)))$$

ist, für $o(y) \geq \overline{\text{long}}(x)$ aber gleich

$$g_1^{\overline{\text{long}}(x)+1}(x)$$

ist (man denke daran, daß $\overline{\text{long}}(x)$ irgendein h_i ist). Für $\overline{\text{ch}}(x) = h_1$ kann x als sein einziges Glied gelten. Wird also $k_{\overline{\text{long}}(x) \div o(y)}(x)$ durch

$$\bar{k}_{\overline{\text{long}}(x) \div o(y)}(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } \overline{\text{ch}}(x) = h_1, \\ g_1(g_2(g_1^{o(y)}(x))), & \text{falls } \overline{\text{ch}}(x) = h_0 \text{ und } o(y) < \overline{\text{long}}(x), \\ g_1^{\overline{\text{long}}(x)+1}(x), & \text{falls } \overline{\text{ch}}(x) = h_0 \text{ und } o(y) \geq \overline{\text{long}}(x) \end{cases}$$

definiert, so ist damit auch die (die Rolle der in Nr. 8 betrachteten Funktion $k_{o(y)}(x)$ übernehmende) Funktion

$$\bar{k}_{o(y)}(x) = \begin{cases} k_{\overline{\text{long}}(x) \div (\overline{\text{long}}(x) \div o(y))}(x), & \text{falls } o(y) \leq \overline{\text{long}}(x), \\ e(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

primitiv-rekursiv.

Aus der Definition sieht man, daß die der Bedingung (K) entsprechende Beziehung

$$k_{o(y)}(x) \leq x$$

immer gilt.

(2) Wenn F nur einstellige Funktionen enthält, dann hat ein beliebiges Element x von H die Form:

$$x = f_i(f_{i-1}(\dots(f_2(f_1(h)))\dots)),$$

wo $f_l \in F$ für $l=1, 2, \dots, i$ und h ein Element von H_0 ist. Das kann unmißverständlich auch ohne Klammern geschrieben werden, etwa die Zeichen in der Reihenfolge ihrer Verwendung aufgereiht:

$$x = hf_1f_2\dots f_i.$$

Wenn als Vorgänger des Elementes x die Konstituenten von x , also

$$h, hf_1, hf_1f_2, \dots, hf_1\dots f_{i-1}, hf_1\dots f_i$$

betrachtet werden, so besitzt x den einzigen unmittelbaren Vorgänger $x^{-1} = hf_1\dots f_{i-1}$, und alle seine echten Vorgänger sind die Vorgänger von x^{-1} . So lautet hier eine primitive Rekursion:

$$f(h, u_1, \dots, u_r) = g_h(u_1, \dots, u_r), \quad \text{falls } h \in H_0,$$

und für $f_i \in F$

$$f(xf_i, u_1, \dots, u_r) = g_{f_i}(x, u_1, \dots, u_r, f(x, u_1, \dots, u_r)).$$

(D)

Nun kann die angeordnete freie holomorphe Menge H umkehrbar eindeutig (und sogar in einem plausiblen Sinne isomorph) auf eine andere angeordnete freie holomorphe Menge $\mathfrak{H}$ abgebildet werden, indem jedem Element $x = hf_1\dots f_i$ von H die Zeichenreihe $\mathfrak{x} = \mathfrak{h}\mathfrak{f}_1\dots\mathfrak{f}_i$ zugeordnet wird, wobei $\mathfrak{h}$ die Konstante und $\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_i$ die Funktionszeichen sind, die der Reihe nach das

Element h von H_0 und die Funktionen $f_1, \dots, f_i$ (die ja unter den Ausgangsfunktionen vorkommen) bezeichnen. $\mathfrak{H}$ besteht also aus allen Zeichenreihen, deren erstes Glied eine Konstante und die etwaigen übrigen Glieder solche Funktionszeichen sind, die Elemente von F bezeichnen. Offenbar ist $\mathfrak{H}$ ebenfalls eine angeordnete freie holomorphe Menge, mit der Menge $\mathfrak{H}_0$ der Konstanten in der Rolle von H_0 , und in der Rolle von F mit der Menge $\mathfrak{F}$ der Funktionen, die jedem zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Zeichenreihe r die durch Anknüpfen eines (ein Element von F bezeichnenden) Funktionszeichens f_i entstehende Zeichenreihe rf_i zuordnet (diese Funktion werde ich ebenfalls mit f_i bezeichnen, so daß $\mathfrak{F}$ zugleich die Menge der die Elemente von F bezeichnenden Funktionszeichen bezeichnen kann), endlich mit dem Vorgängerbegriff, welcher einer zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Zeichenreihe $r = hf_1 \dots f_i$ die Zeichenreihen

$$h, \quad hf_1, \quad hf_1f_2, \dots, hf_1 \dots f_{i-1}, \quad hf_1 \dots f_i$$

und nur diese als Vorgänger (also $r^{-1} = hf_1 \dots f_{i-1}$ als einzigen unmittelbaren Vorgänger) zuordnet. Für jedes $x \in H$ bezeichne ich die derart zugeordnete Zeichenreihe, d. h. „Wort“ (des Alphabets

$$A' = \{\dots, h, \dots; \dots, f, \dots\} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{F},$$

wo h die zu $\mathfrak{H}_0$ gehörigen Konstanten und f die zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Funktionszeichen durchläuft) als das „Gödel-Wort“ von x .

Einer primitiven Rekursion (D) in H entspricht eine primitive Rekursion in $\mathfrak{H}$, welche formal ähnlich lautet, nämlich

$$f(h, u_1, \dots, u_r) = g_h(u_1, \dots, u_r), \quad \text{falls } h \in \mathfrak{H}_0,$$

und für $f_i \in \mathfrak{F}$

$$f(f_i h, u_1, \dots, u_r) = g_{f_i}(h, u_1, \dots, u_r, f(h, u_1, \dots, u_r)); \quad (\mathfrak{D})$$

und dasselbe gilt auch für andere Rekursionsarten.

Nun ist $\mathfrak{H}$ eine Teilmenge der Wortemenge H' mit dem Alphabet A' . Zu $\mathfrak{H}$ gehören, wie gesagt, nur diejenigen Worte von H' (und genau diese sind „sinnvoll“ in H), welche mit einem $h \in \mathfrak{H}_0$ beginnen, und weiter kein Element von $\mathfrak{H}_0$ enthalten. Die charakteristische Funktion $sv(r)$ der Beziehung: „Ein Wort obiger Art zu sein“, d. h. „Sinnvoll in H zu sein“ (welche dem Wert $\wedge$, d. h. das leere Wort, oder ein bestimmtes $h_0 \in \mathfrak{H}_0$, etwa die dem Element h_0 von H_0 entsprechende Konstante als Wert annimmt, je nachdem diese Beziehung gilt oder nicht gilt) kann wie folgt als primitiv-rekursive Funktion in H' definiert werden:

$$sv(\wedge) = h_0, \\ sv(xh) = \begin{cases} \wedge, & \text{falls } x = \wedge, \\ h_0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

falls $h \in \mathfrak{H}_0$; und für $f_i \in \mathfrak{F}$

$$sv(xf_i) = \begin{cases} \wedge, & \text{falls } sv(x) = \wedge, \\ h_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann kann in H' der primitiv-rekursiven Definition (2) in $\mathfrak{H}$ von $f(x, u_1, \dots, u_r)$ die primitiv-rekursive Definition einer Funktion $f'(x, u_1, \dots, u_r)$ zugeordnet werden, welche an „sinnvolle“ Stellen dieselben Werte wie $f(x, u_1, \dots, u_r)$ annimmt, und an anderen Stellen den Wert $\wedge$: Sei

$$f'(\wedge, u_1, \dots, u_r) = \wedge,$$

für $h \in \mathfrak{H}_0$

$$f'(xh, u_1, \dots, u_r) = \begin{cases} g_h(u_1, \dots, u_r), & \text{falls } x = \wedge \text{ und} \\ & sv(u_1) = \dots = sv(u_r) = \wedge, \\ \text{sonst,} & \end{cases}$$

und für $f_i \in \mathfrak{F}$

$$f'(xf_i, u_1, \dots, u_r) = \begin{cases} g_{f_i}(x, u_1, \dots, u_r, f'(x, u_1, \dots, u_r)), \\ \text{falls } sv(x) = sv(u_1) = \dots = sv(u_r) = \wedge, \\ \text{sonst;} \end{cases}$$

dann sieht man durch vollständige Induktion nach der Ordnung der sinnvollen Argumente x , daß

$$f'(x, u_1, \dots, u_r) = \begin{cases} f(x, u_1, \dots, u_r), \\ \text{falls } sv(x) = sv(u_1) = \dots = sv(u_r) = \wedge, \\ \text{sonst.} \end{cases}$$

Ähnlich findet man entsprechende Rekursionen auf der Wortemenge H' zu den anderen Rekursionsarten in H . (Auf die Frage der Umkehrung komme ich auf anderer Stelle zurück.)

Daher beschränke ich mich in den Folgenden auf Wortemengen.

II

23. Von nun an soll H immer eine Wortemenge im Sinne des Beispiels 2 in Nr. 2 bezeichnen, wobei $H_0 = \{\wedge\}$ und $F = \{\dots, xa_i, \dots\}$ ist; die a_i sind dabei die „Buchstaben“ eines beliebigen „Alphabets“ $A = \{\dots, a_i, \dots\}$.

Als Vorgänger eines Wortes sollen $\wedge$ und sämtliche „Abschnitte“ des Wortes betrachtet werden; H soll also immer eine angeordnete freie holomorphe Menge der Art des Beispiels 2" in Nr. 3 sein. Mit den dort eingeführten Bezeichnungen sei die festgewählte Reihenfolge der unmittelbaren Vorgänger eines Wortes x

$$x_1 = x^{-1}, \quad x_2 = {}^{-1}x$$

(für $o(x) := 1$ gilt dann $x_1 = x_2 = \dots$). Statt „ x ist der Form $x = f^*(\dots)$, wo $f^* \in F$ “ kann hier „ x ist der Form $(\dots)a_i$, wo $a_i \in A$ “ gesagt werden. Also lautet hier eine primitiv-rekursive Definition wie folgt:

$$f(\wedge, u_1, \dots, u_r) = g(u_1, \dots, u_r),$$

und falls x der Form $x = (\dots)a_i$ ist, wo $a_i \in A$,

$$f(x, u_1, \dots, u_r) = g_{a_i}(x^{-1}, {}^{-1}x, u_1, \dots, u_r, f(x^{-1}, u_1, \dots, u_r), f({}^{-1}x, u_1, \dots, u_r)),$$

oder aber

$$f(\wedge, u_1, \dots, u_r) = g(u_1, \dots, u_r)$$

und für $a_i \in A$

$$\begin{aligned} f(xa_i, u_1, \dots, u_r) &= \\ &= g_{a_i}(x, {}^{-1}(xa_i), u_1, \dots, u_r, f(x, u_1, \dots, u_r), f({}^{-1}(xa_i), u_1, \dots, u_r)); \end{aligned}$$

wie man leicht sieht, ist das auch mit der folgenden Definition äquivalent:

$$f(\wedge, u_1, \dots, u_r) = g(u_1, \dots, u_r)$$

und für $a_i \in A$

$$f(a_i, u_1, \dots, u_r) = \bar{g}_{a_i}(u_1, \dots, u_r),$$

ferner für $x \neq \wedge, a_i \in A$

$$\begin{aligned} f(xa_i, u_1, \dots, u_r) &= \\ &= g_{a_i}(x, u_1, \dots, u_r, f(x, u_1, \dots, u_r), f({}^{-1}(xa_i), u_1, \dots, u_r)). \end{aligned}$$

Die Funktion x^{-1} kann hier durch folgende primitive Rekursion definiert werden:

$$\wedge^{-1} = \wedge$$

und für $a_i \in A$

$$(xa_i)^{-1} = x,$$

wobei aber auch die Identitätsfunktion $f(x) = x$ verwendet wird. Hier kann man auch diese durch eine primitive Rekursion in den ursprünglichen Ausgangsfunktionen $\wedge$ und xa_i definieren:

$$f(\cdot) = \cdot,$$

und falls $a_i \in A$,

$$f(xa_i) = xa_i.$$

Die Definition von ${}^{-1}x$ lautet:

$${}^{-1}\wedge = \wedge$$

und für $a_i \in A$

$${}^{-1}(xa_i) = \begin{cases} \wedge, & \text{falls } x = \wedge, \\ ({}^{-1}x)a_i & \text{sonst,} \end{cases}$$

und das ist auch eine primitive Rekursion in H (mit Benutzung einer „zusammengefügten“ Funktion; siehe 8. in Nr. 7).

Mit Hilfe der Identitätsfunktion lautet die Definition der Aneinanderknüpfung zweier Worte xy (provisorisch mit $f(x, y)$ bezeichnet):

$$f(x, \wedge) = x$$

und für $a_i \in A$

$$f(x, ya_i) = f(x, y)a_i.$$

24. Betrachten wir noch einige allgemeine Definitionen aus Nr. 7, um zu klären, was sich aus diesen für unseren Spezialfall ergibt.

1. h_0 , als ein Element aus H_0 , kann hier nur $\wedge$ sein. f_0 , als ein ausgewähltes Element aus F , sei hier xa_0 , wo $a_0 \in A$. Dann ist hier

$$h_1 = \wedge a_0 = a_0,$$

$$h_2 = a_0 a_0,$$

$$h_3 = a_0 a_0 a_0,$$

$$\dots\dots\dots$$

Diese sollen der kürzeren Schreibweise halber mit $a_0^1, a_0^2, a_0^3, \dots$ bezeichnet werden; a_0^0 soll $\wedge$ bedeuten. So ist hier

$$h_{o(x)} = a_0^{o(x)}.$$

Hier identifizieren wir also die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \dots$ der Reihe nach mit $\wedge, a_0, a_0^2, \dots$. Die Ordnung r eines Wortes $a_1 a_2 \dots a_r$ wird dadurch mit $a_0 a_0 \dots a_0 = a_0^r$ identifiziert.

1a) Die charakteristische Funktion $\zeta(x)$ der Beziehung, daß x eine natürliche Zahl ist, kann folgenderweise als primitiv-rekursive Funktion definiert werden:

$$\zeta(\wedge) = 0$$

und für $a_i \in A$

$$\zeta(xa_i) = \begin{cases} \zeta(x), & \text{falls } a_i = a_0, \\ a_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. $x^{-o(y)}$ ergibt hier für $o(y) \leq o(x)$ den Rest, der vom Wort x übrig bleibt, wenn seine letzten Buchstaben der Anzahl $o(y)$ weggelassen werden. Für $o(y) > o(x)$ ist $x^{o(y)} = \wedge$.

2a) Hier kann auch ${}^{o(y)}x$ als primitiv-rekursive Funktion definiert werden, worunter für $o(y) \leq o(x)$ der Rest von x bei Weglassung der ersten Buchstaben der Anzahl $o(y)$ verstanden werden soll, und $\wedge$, wenn $o(y) > o(x)$ ist:

$${}^{-o(x)}x = x$$

und für $a_i \in A$

$${}^{-o(ya_i)}x = {}^{-1}({}^{-o(y)}x).$$

3. $e(x)$ ist hier stets gleich $\wedge$, als einziger Vorgänger 0-ter Ordnung von x . Hätte man die Buchstaben von A in H_0 aufgenommen, so würde $e(x)$ den ersten Buchstaben des Wortes x bedeuten. Diese Funktion werden wir hier brauchen; und auch allgemeiner das aus den ersten Buchstaben der Anzahl $o(y)$ von x bestehende Wort. Das soll mit $e_{o(y)}(x)$ bezeichnet werden; dabei sei $e_{o(y)}(x) = \wedge$ für $o(y) > o(x)$. Die Definition von $e_{o(y)}(x)$ lautet (mit Bezugnahme auf 10. von Nr. 7):

3a)

$$e_{o(y)}(\wedge) = \wedge$$

und für $a_i \in A$

$$e_{o(y)}(xa_i) = \begin{cases} e_{o(y)}(x), & \text{falls } o(xa_i) > o(y), \\ xa_i, & \text{falls } o(xa_i) = o(y), \\ \wedge & \text{sonst.} \end{cases}$$

3b) Auch $l_{o(y)}(x)$, welches für $o(y) > o(x)$ den Wert $\wedge$ annimmt, und sonst das aus den letzten Buchstaben der Anzahl $o(y)$ von x bestehende Wort bedeutet, kann durch eine primitive Rekursion definiert werden:

$$l_{o(y)}(\wedge) = \wedge$$

und für $a_i \in A$

$$l_{o(y)}(xa_i) = \begin{cases} {}^{-1}l_{o(y)}(x)a_i, & \text{falls } o(xa_i) > o(y) > 0, \\ xa_i, & \text{falls } o(xa_i) = o(y), \\ \wedge & \text{sonst.} \end{cases}$$

4. Dies ergibt hier die charakteristische Funktion der Beziehung, daß das Wort x mit einem bestimmten Buchstaben a_i endet.

Alles andere von Nr. 7 überträgt sich wörtlich auf unseren Spezialfall.

Die charakteristische Funktion der Gleichheit $x=y$ kann auch hier nicht allgemein durch primitive Rekursionen und Substitutionen definiert werden, muß also zu den Ausgangsfunktionen hinzugenommen werden.

25. Hier können aber auch weitere wichtige primitiv-rekursive Funktionen definiert werden. Zum Beispiel:

(1) Definition der charakteristischen Funktion der Beziehung, daß x ein Abschnitt von y ist, das heißt, nach der Definition der Vorgänger eines Wortes, daß $y < x$ gilt (provisorisch mit $f(x, y)$ bezeichnet):

$$f(\wedge, y) = \begin{cases} \wedge, & \text{falls } y = \wedge, \\ a_0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und für $a_i \in A$

$$f(xa_i, y) = \begin{cases} \wedge, & \text{falls } xa_i = y \vee f(x, y) = \wedge \vee f({}^{-1}(xa_i), y) = \wedge, \\ a_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(2) Definition des Wortes $\text{subst}(x, y, z)$, welches aus x entsteht, wenn darin vom Ende nach dem Anfang gehend jedes Vorkommen von y durch z ersetzt wird (wobei natürlich $\text{subst}(x, y, z) = x$ ist, wenn y nicht unter den Abschnitten von x vorkommt; und für $y = \wedge$ sei $\text{subst}(x, y, z) = x$):

$$\text{subst}(x, y, z) =$$

und für $a_i \in A$

$$\text{subst}(xa_i, y, z) = \begin{cases} x, & \text{falls } y = \wedge, \\ z^{(-o(y)+1)} \text{subst}(x^{-1}(a_i), y, z), & \\ \text{falls } e_1(xa_i) e_{o(y)+1}(\text{subst}(x^{-1}(a_i), y, z)) = y, & \\ e_1(xa_i) \text{subst}(x^{-1}(a_i), y, z) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier kann $o(y) + 1$ überall durch $o(y^{-1})$ ersetzt werden; also ist die Funktion $\text{subst}(x, y, z)$ primitiv-rekursiv.

Für $z = \wedge$ bedeutet $\text{subst}(x, y, z)$ das Wort, das aus x übrigbleibt, wenn davon vom Ende nach dem Anfang gehend jedes Vorkommen von y gestrichen wird.

(3) Eine andere Art Ersetzung ist, wenn in x ein mit dem $o(i) + 1$ -ten Buchstaben beginnender Abschnitt der Ordnung $o(y)$ durch z ersetzt wird, falls er gleich y ist, und unverändert gelassen wird, wenn nicht. Das so entstehende Wort, mit $\text{ers}(i, x, y, z)$ bezeichnet, wobei wieder $\text{ers}(i, x, y, z) = x$ für $y = \wedge$ sei, kann durch folgende „zusammengeflückte“ Definition angegeben werden:

$$\text{ers}(i, x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{falls } y = \wedge, \\ e_{o(i)}(x) z l_{o(x)+o(iy)}(x), & \text{falls } e_{-o(i)} e_{o(iy)}(x) = y \neq \wedge, \\ x & \text{sonst,} \end{cases}$$

woraus sich $\text{ers}(i, x, y, z)$ wegen $o(x) + o(iy) = o(x^{o(iy)})$ als primitiv-rekursive Funktion ergibt.

26. In wichtigen Anwendungen, z. B. in einer exakten Fassung der (in der Programmierung wichtige Rolle erhaltenden) algorithmischen Sprache „Algol“,⁷ treten aber meistens nicht primitive Rekursionen, sondern simultane

⁷ A. J. PERLIS and K. SAMELSON, Report on the algorithmic language ALGOL by the ACM Committee on Programming Languages and the GAMM Committee on Programming, *Numerische Mathematik*, **1** (1959), S. 41–60. — Zusatz bei der Korrektur (am 25. August 1961): In der Zeitschrift *Numerische Mathematik* ist in 1960 ein Referat über die algorithmische Sprache „Algol 60“ erschienen. Ich habe bewiesen, daß die darin für den ersten Augenblick als zirkelhaft definiert erscheinenden Prädikate bei exakter Fassung primitiv-rekursive Beziehungen auf einer Wortemenge sind. Darüber habe ich am II. Ungarischen Mathematikerkongress (1960) einen Vortrag gehalten; eine ausführlichere Mitteilung ist im Erscheinen in den *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*

und Wertverlaufsrekursionen auf (in den letzteren werden meistens nicht nur Anfangsstücke, sondern beliebige Abschnitte der Worte als Vorgänger verwendet; letzten Endes war gerade das entscheidend in der Wahl unserer Anordnung der Wortemenge H). Um auch diese auf primitive Rekursionen zurückführen zu können, haben wir nach Nr. 8—20 eine geeignete Abbildung der endlichen Elementenfolgen von H auf H zu wählen.

Besteht das Alphabet aus einem einzigen Buchstaben a_0 , dann sind sämtliche Elemente der Wortemenge:

$$, a_0, a_0^2, \dots,$$

die wir mit den natürlichen Zahlen

$$0, 1, 2, \dots$$

identifiziert haben. Hier hat jedes Wort $x \neq$ den einzigen unmittelbaren Vorgänger

$$x^{-1} = {}^{-1}x = x - 1.$$

So kann diese Wortemenge einfach als identisch der Menge der natürlichen Zahlen betrachtet werden. Hier erhält man die Zusammenhänge der verschiedenen Rekursionsarten mit Benutzung der zahlentheoretischen Eigenschaften der Elemente, z. B. der eindeutigen Primfaktorenzerlegung. Auch die charakteristische Funktion der Gleichheit $x = y$ kann hier bekanntlich primitivrekursiv definiert werden. Als einzige Ausgangsfunktion bleibt hier neben der Konstanten 0, d. h. die Funktion xa_0 , das mit $x + 1$ identifiziert wurde.

In den Weiteren nehme ich daher an, daß das Alphabet A wenigstens zwei Buchstaben a_0, a_1 enthält; für die Mächtigkeit von A stelle ich vorläufig keine andere Bedingungen.

27. Einer endlichen Folge

$$y_0 \in H, \quad y_1 \in H, \dots, y_n \in H$$

könnte man mit einem geeigneten „Trennzeichen“ $\alpha \in H$ das Wort

$$y_0 \alpha y_1 \alpha \dots \alpha y_n \alpha$$

zuordnen; man hat aber bei der Wahl von α darauf zu achten, daß aus diesem Wort die Glieder der Folge eindeutig wiederzuerkennen seien. Ich wähle als Trennzeichen die Worte α_i , wo

$$\alpha_i = a_1 a_0^i a_1 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots$$

ist. Genauer sei j die größte Zahl, für welche a_0^j Vorgänger von mindestens einem Glied der Folge $(y_0, \dots, y_n)$ ist, dann ordne ich dieser Folge das Wort

$$c_n(y_0, \dots, y_n) = y_0 \alpha_{j+1} \dots \alpha_{j+1} y_n \alpha_{j+1}$$

zu.

So ist x dann und nur dann einer endlichen Wortefolge aus H zugeordnet, wenn es mit einem α_{j+1} endet, und dabei weder

$$a_1 a_0^{j+1} a_1 a_0^{j+1} a_1$$

noch ein

$$a_{i_1} a_0^{j+1} a_{i_2}$$

Vorgänger von x ist, wenn nicht $a_{i_1} = a_{i_2} = a_1$ gilt.

Ist x einer Folge $(y_0, \dots, y_n)$ zugeordnet, also der Form

$$x = y_0 \alpha_{j+1} \dots \alpha_{j+1} y_n \alpha_{j+1},$$

so wird in Abhängigkeit von x die „Länge“ n dieser Folge durch $\text{long}(x)$ und das Glied y_i durch $k_i(x)$ bezeichnet. Wie man sieht, ist in diesem Fall $k_i(x)$ für jede Zahl $i \leq n$ ein Vorgänger von x ; wird es für andere Werte x und i als $\wedge$ definiert, so gilt stets

$$k_i(x) \leq x,$$

in Übereinstimmung mit der Forderung (K) der Nr. 16.

28. Ich zeige, daß $\text{long}(x)$ und $k_i(x)$ als primitiv-rekursive Funktionen in H definiert werden können; dann auch die Funktion $p(x, y)$ der Nr. 10.

Ich schicke die primitiv-rekursive Definition einiger Hilfsfunktionen voraus.

1. Sei $b_\alpha(x)$ die charakteristische Funktion der Beziehung, daß x der Form α_i ist ($i=1, 2, \dots$). Dann ist

$$b_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } e_1(x) = a_1 \text{ \& } l_1(x) = a_1 \text{ \& } \neg(x \prec x^{-1}) \neq \neg \neg(x \prec x^{-1}) \\ a_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Sei nun $f_\alpha(x)$ gleich α_{j+1} , falls x einer endlichen Folge aus H zugeordnet ist, und mit α_{j+1} endet; sonst sei $f_\alpha(x) = \wedge$. Dann gilt

$$f_\alpha(x) = \mu_y [y \prec x \text{ \& } b_\alpha(y) \text{ \& } l_{o(y)}(x) = y \text{ \& } a_1 a_0^{o(y)-2} a_1 a_0^{o(y)-2} a_1 \vdash x \text{ \& } \\ \text{\& } (u)(v) [u \leq x \rightarrow (v \prec x \rightarrow (x = u a_0^{o(y)-2} v \rightarrow (l_1(u) = a_1 \text{ \& } e_1(v) = a_1)))]].$$

Zur Definition von $\text{long}(x)$ und $k_i(x)$ hat man vor Augen zu halten, daß für $f_\alpha(x) \neq \wedge$

$$x = k_0(x) f_\alpha(x) k_1(x) f_\alpha(x) \dots f_\alpha(x) k_{\text{long}(x)}(x) f_\alpha(x)$$

gilt.

3. Zuerst ergibt sich daraus die Definition von $k_0(x)$:

$$k_0(x) = \mu_y [y \leq x \text{ \& } f_\alpha(x) \leq y \text{ \& } (Ez)[z \prec x \text{ \& } x = y f_\alpha(x) z]].$$

(Für $f_\alpha(x) = \wedge$ folgt daraus $k_0(x) = \wedge$.)

4. Wird für $f_\alpha(x) \neq$ vom Anfang von x dieses $k_0(x)$ und das danach stehende $f_\alpha(x)$ weggelassen, so soll der Rest mit $g(x)$ bezeichnet werden:

$$g(x) = {}^{-o(k_0(x)f_\alpha(x))}x.$$

(Daraus folgt $g(x) = x$ für $f_\alpha(x) = \wedge$.)

5. Das hat man nun zu iterieren. Sei

$$\bar{g}_{o(y)}(x) = x$$

und für $a_i \in A$

$$\bar{g}_{o(ya_i)}(x) = g(\bar{g}_{o(y)}(x)).$$

(Für $f_\alpha(x) = \wedge$ gilt immer $\bar{g}_{o(y)}(x) = x$.)

6. Nun kann $\text{long}(x)$ durch

$$\text{long}(x) = o(\mu_y[y \leq x \ \& \ \bar{g}_{o(ya_0)}(x) = \wedge])$$

definiert werden (für $f_\alpha(x) =$ ergibt sich daraus $\text{long}(x) =$).

7. Endlich erhält man

$$k_{o(y)}(x) = \begin{cases} k_0(\bar{g}_{o(y)}(x)), & \text{falls } o(y) \leq \text{long}(x), \\ \wedge & \text{sonst.} \end{cases}$$

8. Zur Definition von $p(x, y)$ der Nr. 10 hat man zu untersuchen, wie das der Folge $(y_0, \dots, y_n, y_{n+1})$ zugeordnete Wort

$$c_{n+1}(y_0, \dots, y_n, y_{n+1}) = y_0 \alpha_{j+1} \dots \alpha_{j+1} y_n \alpha_{j+1} y_{n+1} \alpha_{j+1}$$

aus

$$x = c_n(y_0, \dots, y_n) \quad \text{und} \quad y = c_0(y_{n+1}) = c(y_{n+1})$$

gebildet werden kann. Dabei ist j die größte der Zahlen i , für welche a_i Vorgänger von mindestens einem der $y_0, \dots, y_n, y_{n+1}$ ist. So ist α_{j+1} dasjenige von

$$f_\alpha(c_n(y_0, \dots, y_n)) \quad \text{und} \quad f_\alpha(c(y_{n+1})),$$

welches von größerer Ordnung ist.

9. Wird daher

$$m(x, y) = \begin{cases} f_\alpha(x), & \text{falls } o(f_\alpha(y)) \leq o(f_\alpha(x)), \\ f_\alpha(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

gesetzt, dann gilt

10.

$$c_{\text{long}(x)+1}(k_0(x), k_1(x), \dots, k_{\text{long}(x)}(x), k_0(y)) = \\ = \text{subst}(x, f_\alpha(x), m(x, y)) \text{subst}(y, f_\alpha(y), m(x, y)).$$

Demnach läßt sich in einer Wortemenge $p(x, y)$ — und natürlich auch $c(x) = xf_\alpha(x)$ — als primitiv-rekursive Funktion definieren, ohne neue Ausgangsfunktionen heranzuziehen.

29. Es wurde ferner in Nr. 11 gefordert, daß bei der gewählten Anordnung

$$\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s$$

sämtlicher Vorgänger von einem $x \in H$ der Form $x = f^*(\dots)$, bei festem $f^* \in F$, falls i die kleinste Zahl ist, für welche x_i bei einem $j < s$ ein Vorgänger, und zwar mit dem Index l , des i -ten unmittelbaren Vorgängers x_i von x ist, dann

s, i, l

von den unmittelbaren Vorgängern von x bzw. von diesen und von j primitivrekursiv abhängen sollen. Im Fall der Wortmenge sollen also s, i, l bei festem a_i primitiv-rekursive Funktionen der Vorgänger $x_1 = x', x_2 = 'x$ von $x = (\dots)a_i$ bzw. von diesen und j sein.

Die Vorgänger eines nicht leeren Wortes $x = d_1 d_2 \dots d_n$, wo $d_r \in A$ für $r = 1, 2, \dots, n$, und zwar $d_n = a_i$, sind in der gewählten Reihenfolge:

$$\begin{aligned} & d_1, \\ & d_2, d_1d_2, \\ & d_3, d_2d_3, d_1d_2d_3, \\ & \dots\dots\dots \\ & d_{n-1}, d_{n-2}d_{n-1}, \dots, d_1d_2\dots d_{n-1}, \\ & d_n, d_{n-1}d_n, \dots, d_2d_3\dots d_n, d_1d_2\dots d_n. \end{aligned}$$

Ihre Anzahl ist

$$1 + \binom{n+1}{2};$$

die Anzahl derjenigen darunter, die d_n noch nicht enthalten, also Vorgänger von x^{-1} sind, ist $1 + \binom{n}{2}$. Selbstverständlich ist auch die Anzahl der Vorgänger von ^{-1}x (welche d_1 nicht enthalten) ebenfalls $1 + \binom{n}{2}$; von diesen kommen $1 + \binom{n-1}{2}$ bereits unter den Vorgängern von x^{-1} vor. Die Vorgänger von ^{-1}x , welche keine Vorgänger von x^{-1} sind, stehen alle in der letzten Reihe von (V):

$$d_n, d_{n-1}d_n, \dots, d_2d_3 \dots d_n.$$

Wenn $\bar{x}_j$ das r -te Glied dieser Reihe ist, dann ist

$$j = \binom{n}{2} + r,$$

und unter den Vorgängern von ${}^{-1}x = d_2 d_3 \dots d_n$ hat $\bar{x}_j$ den Index

$$i = \binom{n-1}{2} + r;$$

so gilt in diesem Fall

$$i = j - (n-1).$$

Daher erhält man mit

$$\sigma(z) = \binom{o(z)+1}{2},$$

$$\iota(y, z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \zeta(y) = \wedge \text{ \& } o(y) \leq \binom{o(z)}{2}, \\ 2, & \text{falls } \zeta(y) = \cdot \text{ \& } 1 + \binom{o(z)}{2} \leq o(y) < \binom{o(z)+1}{2}, \\ \text{und etwa } \wedge & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\lambda(y, z) = \begin{cases} o(y), & \text{falls } \zeta(y) = \wedge \text{ \& } o(y) \leq \binom{o(z)}{2}, \\ o(y) - (o(z) - 1), & \text{falls } \zeta(y) = \wedge \text{ \& } \\ 1 + \binom{o(z)}{2} \leq o(y) < \binom{o(z)+1}{2}, \\ \text{und etwa } \wedge & \text{sonst,} \end{cases}$$

die nach dem Satz von Nr. 6 primitiv-rekursive Funktionen sind,

$$s = \sigma(x) = \sigma(x^{-1}a_i), \quad i = \iota(j, x) = \iota(j, x^{-1}a_i), \quad l = \lambda(j, x) = \lambda(j, x^{-1}a_i),$$

also, wie gefordert war, bei jedem a_i als primitiv-rekursive Funktionen von x^{-1} und ${}^{-1}x$, bzw. von diesen und j , ohne Hinzunahme neuer Ausgangsfunktionen.

30. Endlich wurde in Nr. 18 noch gefordert, daß falls $k_i(x_1)$ der Vorgänger mit dem Index r von x_1 ist, dann r eine primitiv-rekursive Funktion von i und den unmittelbaren Vorgängern von x sei.

Im Fall der Wortemenge ist

$$x_1 = x^{-1},$$

und der Vorgänger mit dem Index r von x^{-1} ist zugleich der Vorgänger $\bar{x}_r$ mit dem Index r von x . Wir haben also jenes r zu bestimmen, für das

$$k_i(x_1) = \bar{x}_r$$

gilt.

Für $f_\alpha(x_1) = \wedge$ oder $i > \text{long}(x_1)$ ist $k_i(x_1) = \wedge$, also $v = 0$. Sonst ist nach 4. und 5. der Nr. 28

$$\begin{aligned} x_1 &= d_1 d_2 \dots d_{o(x_1)} = k_0(x_1) f_\alpha(x_1) k_1(x_1) f_\alpha(x_1) \dots f_\alpha(x_1) k_{\text{long}(x_1)}(x_1) f_\alpha(x_1) = \\ &= e_{o(x_1) \div o(\bar{g}_i(x_1))}(x_1) k_i(x_1) l_{o(\bar{g}_i(x_1)) \div o(k_i(x_1))}(x_1), \end{aligned}$$

also

$$k_i(x_1) = d_{i_1+1} d_{i_1+2} \dots d_{i_1+i_2},$$

wo

$$i_1 = o(x_1) \div o(\bar{g}_i(x_1)) = o(x_1^{-o(\bar{g}_i(x_1))})$$

und

$$i_2 = o(k_i(x_1))$$

primitiv-rekursive Funktionen von i und x_1 sind.

Man entnimmt leicht aus (V) in Nr. 29, daß

$$v = \binom{i_1 + i_2}{2} + i_2$$

ist, also ergibt sich mit der Funktion

$$\varphi(y, z) = \begin{cases} \left(\frac{o(z^{-o(\bar{g}_o(y)(z))}) + o(k_{o(y)}(z))}{2} \right) + o(k_{o(y)}(z)), \\ \wedge \quad \text{falls } f_\alpha(z) \neq \cdot \text{ \& } \zeta(y) = \cdot \text{ \& } o(y) \leq \text{long}(z), \\ \wedge \quad \text{sonst,} \end{cases}$$

die (wegen $\text{long}(z) = o(\text{long}(z))$) nach dem Satz der Nr. 6 primitiv-rekursiv ist,

$$v = \varphi(i, x_1)$$

als primitiv-rekursive Funktion von i und von den unmittelbaren Vorgängern x_1 und x_2 von x , ohne Hinzunahme neuer Ausgangsfunktionen.

Man zeigt ähnlicherweise, daß auch jenes kleinste u und jenes w , für welche $k_i(\bar{x}_j)$ bei $j < s$ der Vorgänger mit dem Index w von x_i ist, primitiv-rekursive Funktionen von i, j, x_1 und x_2 sind (bei jedem festen a_i , falls x der Form $x = (\dots)a_i$ ist). Dies kann man dazu verwenden, um von gewissen speziellen Wertverlaufsrekursionen zu zeigen, daß sie wirklich unter die in Nr. 9 behandelten allgemeinen Wertverlaufsrekursion fallen; nämlich von solchen, bei welchen der Wert der zu definierenden Funktion an einer Stelle x mit Hilfe von Werten derselben Funktion an Stellen der Form $k_i(\bar{x}_j)$ gegeben wird.

31. Es hat sich herausgestellt, daß in einer Wortemenge nicht notwendig ist neue Ausgangsfunktionen aufzunehmen. Allein von $\wedge$, von den Funktionen der Menge F und von der charakteristischen Funktion der Gleichheit $x = y$

ausgehend können in jeder Wortemenge die simultanen Rekursionen, die Wertverlaufsrekursionen und die eingeschachtelten Rekursionen auf primitive Rekursionen, und diese auf das dem in Nr. 13 angegebenen reduzierten Form entsprechende Schema

$$f(\ , u) = g(u),$$

und falls $a_i \in A$,

$$f(xa_i, u) = g_{a_i}(x, f(x, u), f(^{-1}(xa_i), u))$$

nebst Substitutionen zurückgeführt werden.*

(Eingegangen am 30. September 1959.)

* Anmerkung der Redaktion. Der Schluß der Arbeit wird aus technischen Gründen in unserem nächsten Heft erscheinen.

PROJECTIVE n -SIMPLEXES IN A $[2n-2]$

By

S. R. MANDAN (Kharagpur, India)

(Presented by G. HAJÓS)

1. Introduction. Let (P) be an n -dimensional simplex in a projective space p of n dimensions ($n \geq 2$), or briefly an n -simplex in an $[n]$ p , and let (Q) be another in a different $[n]$ q . If the $n+1$ joins of their corresponding vertices P_i, Q_i ($i=0, \dots, n$) have an $[n-2]$ as a common transversal t , they are then said to be *projective from t* ([6]—[8]) and determine a $[2n-1]$ or lie in a $[2n-2]$, assuming that they don't lie in a lower space. If p_i is the $[n-1]$ of (P) opposite P_i and q_i that of (Q) opposite Q_i , in either case then they meet in a point $R_i = p_i \cdot q_i$.

The purpose of this paper is to prove *synthetically* that

$(P), (Q)$ are projective from an $[n-2]$, if and only if the $n+1$ points R_i are collinear.

We follow here the line of argument adopted by BAKER ([1]) and COXETER ([4]) to prove the Desargues' two-triangle theorem and its converse ([3]). In fact, for $n=2$, our proposition reduces to this theorem. Hence we too have named ([7]) it after Desargues.

But the treatment there ([7]) and for a particular case ([5]) of projective tetrahedra ($n=3$) in a $[4]$ is *analytic*. The synthetic proof of the proposition, as based on the axioms and the corresponding propositions of incidence in $[2n-1]$ or on the Desargues' theorem in a plane and the axioms of $[2n-2]$ only for $n>2$, has its own interest and thus deserves a special study.

The knowledge of the axioms of incidence in an $[m]$ for all integral values of m is assumed.

2. $(P), (Q)$ in a $[2n-1]$. a) When $(P), (Q)$ are in a $[2n-1]$, the proposition is just an obvious one of incidence alone bordering almost on triviality like the Desargues' theorem in a solid ([3]). For, in a $[2n-1]$, if $(P), (Q)$ are projective from an $[n-2]$, they are just projections of each other from the $[n-2]$ in their respective $[n]$'s, thus justifying their adjective projective, such that the $n+1$ points R_i lie in the line $r=p \cdot q$ common to their 2 $[n]$'s p, q .

b) Conversely, if p_i, q_i meet in a point R_i , the $n+1$ $[2n-2]$'s $p_i q_i$ meet in an $[n-2]$, say t , lying in the $[n-1]$ common to n of them through

a particular join $P_j Q_i$ which then meets t . Thus all the $n+1$ joins $P_i Q_i$ are met by t showing (P) , (Q) to be projective from t .

3. (P) , (Q) in a $[2n-2]$. a) Let (P) , (Q) lie in a $[2n-2]$ e and projective from an $[n-2]$ t ; let A and B be 2 points on a line, meeting t , outside e ; further let $p_{ij} = p_i \cdot p_j$ be the $[n-2]$ of (P) opposite $P_i P_j$ and similarly $q_{ij} = q_i \cdot q_j$. A, p_{ij}, t then determine a $[2n-2]$ which contains B, q_{ij} too. Therefore the 2 $[n-1]$'s Ap_{ij}, Bq_{ij} meet in a point R_{ij} .

Again AB, e determine a $[2n-1]$ f , and the 2 $[n]$'s Ap_i, Bq_i , lying therein, meet in a line r_i which then contains the n points R_{ij} ($i \neq j$) and the $(n+1)^{\text{th}}$ point $R_i = p_i \cdot q_i$ too. The $n+1$ lines r_i lie in a plane g , for every two of them meet in a point like R_{ij} . The 2 $[n+1]$'s Ap, Bq , lying in f , meet in a solid which then contains g as well as the plane $h = p \cdot q$ common to the 2 $[n]$'s p, q of (P) , (Q) lying in e . Thus the $n+1$ points R_i , lying in g and h both, lie on their common line $r = g \cdot h$.

b) Conversely, suppose that the $n+1$ points R_i lie in a line r which lies in the plane h , and let t be the definite $[n-2]$ transversal of the n joins $P_j Q_i$ ($i \neq j$) of general position in e ([1], p. 39, ex. 7). Then we have to prove that t meets $P_i Q_i$ too.

Let g be a plane meeting e in r ; let r_i be a line in g , through every R_i ; the $n+1$ $[n]$'s $r_i p_i$, lying in the $[n+1]$ gp , meet in a point A , and the $n+1$ $[n]$'s $r_i q_i$ similarly meet in B .

Now following BAKER ([1], p. 8), it follows from what precedes that AB meets t . For, (Ap_i) is an n -simplex formed of A and the n vertices of (P) in p_i , and (Bq_i) is another formed similarly, both lying in the $[2n-1]$ $f = ge$; their corresponding $[n-1]$'s meet on the line r_i common to their $[n]$'s Ap_i, Bq_i , and therefore, by § 2b), they are projective from an $[n-2]$ which is no other than t . Similarly now are projective the 2 n -simplexes $(Ap_i), (Bq_i)$ ($i \neq j$), similarly formed, from the same $[n-2]$, viz., t . Thus t meets the join of their corresponding vertices P_i, Q_i .

4. **Alternative proof of the preceding proposition.** But to prove the theorem in a $[2n-2]$ e ($n > 2$), we may not like to peep out of this space into a $[2n-1]$ and beg for help there, as if the axioms of e are not enough for our purpose. To justify our preference for an approach independent of an outside space we may proceed as follows:

a) Let (P) , (Q) be as in § 3a). $R_i = p_i \cdot q_i$ is seen to be the point of intersection $(h \cdot p_i) \cdot (h \cdot q_i)$ of the 2 lines, in the plane h , where it meets p_i, q_i . The 3 points R_i, R_j, R_k are collinear, if and only if the 2 trilaterals $u = (h \cdot p_i)(h \cdot p_j)(h \cdot p_k)$, $v = (h \cdot q_i)(h \cdot q_j)(h \cdot q_k)$ are Desargues trilaterals. To prove that they are we may observe that the 3 joins of their corresponding

vertices concur at the point of intersection of h with the $[2n-4]$ c determined by the $[n-2]$ t and the $[n-3]$ $p_{ijk} = p_{ij} \cdot p_k$ or $q_{ijk} = q_{ij} \cdot q_k$. For, the join of the vertex $(h \cdot p_i) \cdot (h \cdot p_j) = h \cdot p_{ij} = h \cdot p_{ijk} P_k$ of u to the corresponding vertex $h \cdot q_{ijk} Q_k$ of v is the line of intersection of h with the $[2n-3]$ $P_k c Q_k$, and similarly behave the other 2 joins meeting c in the same point.

Thus any 3 of the $n+1$ points R_i and therefore all are collinear.

b) Conversely, let the $n+1$ points R_i lie in a line r and let t be as in §3b). Following the argument and notation of the preceding section, we find that the 3 $[2n-3]$'s $p_{ij}q_{ij}$, $p_{jk}q_{jk}$, $p_{ki}q_{ki}$ have a $[2n-4]$ c in common, through the $[2n-5]$ $p_{ijk}q_{ijk}$, meeting therefore the 3 joins $P_i Q_i$, $P_j Q_j$, $P_k Q_k$. Thus $c = t p_{ijk}$, and there are $\binom{n}{2}$ such spaces, through t , all meeting the join $P_i Q_i$, one for each pair of values of j, k other than i . Hence $P_i Q_i$ meets t , for the said spaces evidently just happen to have t in common and no other point.

5. Applications. a) We have seen in [8] that: *If $n-1$ consecutive edges of the $(n+1)$ -gon formed of $n+1$ vertices of a simplex S in a $[2n-2]$ be "conjugate" for a quadric Q therein to their respectively opposite $[n-2]$'s, their n -simplex is projective to the corresponding one of the polar simplex S' of S for Q from an $[n-2]$ through the polar $[n-3]$ of their $[n]$ for Q .*

DEFINITION. A line l is said to be *conjugate* to an $[n-2]$ m for Q , if the polar $[n-1]$ m' of m for Q meets l in a point which therefore is the pole, for Q , of the hyperplane determined then by m and the polar $[2n-4]$ l' of l for Q .

When $n=3$, this proposition is used ([8]) to construct a *self-conjugate heptad* (h) of points for Q in a $[4]$ such that the plane containing any 3 of them is conjugate for Q to the solid containing the other four.

In fact, it is the construction of this (h) that led to the theory of projective tetrahedra ([6]) from a line and, consequently, to that of projective n -simplexes from an $[n-2]$ in a $[2n-2]$.

b) The pair of n -simplexes (P) , (Q) , projective from an $[n-2]$ t , gives rise to $2^n - 1$ more such pairs obviously projective from the same $[n-2]$ t . For, there are 2 choices for every point, P_i or Q_i , to belong to an n -simplex of a pair independent of each other. For example, $n+1$ pairs are of the type $Q_0 P_1 \dots P_n$, $P_0 Q_1 \dots Q_n$; $\binom{n+1}{2}$ pairs of the type $Q_0 Q_1 P_2 \dots P_n$, $P_0 P_1 Q_2 \dots Q_n$, and so on.

If R_i (§1) is called the *arguesian point* ([7]) and their line r as the *arguesian line* of (P) , (Q) , we find that: *There are, in all, 2^n arguesian lines,*

one for each pair of projective n -simplexes, and $2^n(n+1)$ arguesian points, $n+1$ on each line and each common to 2 lines, such that every line meets $n+1$ other lines, skew to each other.

It is further shown in [7] that: The arguesian points distribute into $n+1$ groups of 2^{n-1} each such that the points of a group form the vertices of a dual of an $(n-1)$ -dimensional S -configuration ([5]) whose diagonal $(n-1)$ -simplex forms a prime face of the n -simplex with vertices at the $n+1$ points which are the harmonic conjugates of the $n+1$ points of intersection of the transversal $[n-2] t$ with the $n+1$ joins $P_i Q_i$ w. r. t. P_i, Q_i , respectively.

When $n=3$, the 8 arguesian lines lie on a quadric, and when $n=4$, the 16 arguesian lines form the general 16₅ figure on the Segre quartic surface ([2], pp. 166—172). For these cases of evident interest, we may refer further to [6] and [7], respectively.

c) We may introduce a pair of $(n+1)$ -simplexes projective from an $[n-2] t$ in a $[2n-2]$, $[2n-1]$ or $[2n]$ such that t meets all the $n+2$ joins of their corresponding vertices. They give rise to $n+2$ arguesian lines, one for each pair of their corresponding n -simplexes, which then evidently lie in a plane, referred to as their *arguesian plane*. In the $[2n]$, it is obviously a proposition of incidence alone.

Again one such pair gives rise to $2^{n+1}-1$ more pairs projective from t . Thus: There arise 2^{n+1} arguesian planes, one for each pair, and $2^n(n+2)$ arguesian lines, $n+2$ in each plane and each common to 2 planes which then lie in a solid such that there are $2^n(n+2)$ such solids, each containing $2n+3$ lines. There are $2^{n-2}(n+2)(n+1)$ arguesian points, $(n+1)^2$ in each solid, each lying on 4 lines and 4 planes which lie in a [4], for $n>3$, such that there are $2^{n-2}(n+2)(n+1)$ such [4]'s in all, each containing 4 solids, 4 planes, $4(n+1)$ lines and $2n^2+2n+1$ points.

For further details of this interesting configuration, when $n=3$, we refer to [6] and for $n>3$ to [7].

d) Similarly we may consider, in general, a pair of $(n+m)$ -simplexes ($m>n-1$) projective from an $[n-2] t$ in a $[2n-2]$, ..., or $[2n+m-1]$ such that t meets all the $n+m+1$ joins of their corresponding vertices. They give rise to $\binom{n+m+1}{m}$ arguesian lines and $\binom{n+m+1}{n}$ arguesian points, $n+1$ on each line, all lying in an $[m+1]$, called their *arguesian* $[m+1]$. Obviously, it is a proposition of incidence in the $[2n+m-1]$.

One such pair gives rise to $2^{n+m}-1$ more pairs projective from t , and thus there arise 2^{n+m} arguesian $[m+1]$'s in all. Given m , we can build up

the complete picture of the configuration of arguesian points, lines, planes, ..., and $[m+1]$'s.

Thanks are due to Prof. B. R. SETH for his generous, kind and constant encouragement in my pure pursuits.

INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY,
KHARAGPUR, INDIA

(Received 7 March 1960)

References

- [1] H. F. BAKER, *Principles of geometry. 1* (Cambridge, 1929).
- [2] H. F. BAKER, *Principles of geometry. 4* (Cambridge, 1940).
- [3] N. A. COURT, Desargues and his strange theorem, *Scrip. Math.*, **20** (1954), pp. 1—20.
- [4] H. S. M. COXETER, *The real projective plane* (Cambridge, 1955).
- [5] S. R. MANDAN, An S -configuration in Euclidean and elliptic n -space, *Canad. Journ. Math.*, **10** (1958), pp. 489—501.
- [6] S. R. MANDAN, Projective tetrahedra in a 4-space, *Journ. Sci. Engg. Res.*, **3** (1959), pp. 169—174.
- [7] S. R. MANDAN, Desargues' theorem in an $[n]$, *Journ. Austr. Math. Soc.* **1** (1960), pp. 311—318.
- [8] S. R. MANDAN, Polarity for a quadric in an n -space, *Rev. Fac. Sc. Univ. Istambul*, **24** (1959), pp. 421—440.

ON A CONSISTENCY THEOREM CONNECTED WITH THE GENERALIZED CONTINUUM PROBLEM¹

By

A. HAJNAL (Budapest)

(Presented by L. KALMÁR)

§ 1. Introduction. (Summary, notations)

It is known that GÖDEL [1] has proved the consistency of the generalized continuum hypothesis $(\alpha)(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$ with the axiom system Σ^* .² Presumably the generalized continuum hypothesis is independent of the axiom system Σ^* , however, the consistency of the negation of this hypothesis with Σ^* has not yet been proved.

Moreover, presumably each of the particular cases $2^{\aleph_0} = \aleph_1, 2^{\aleph_1} = \aleph_2, \dots, 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+1}, \dots, 2^{\aleph_\lambda} = \aleph_{\lambda+1}, \dots$ is independent of the axiom system Σ^* . However, for a given ordinal λ the question of independence of the statement $2^{\aleph_\lambda} = \aleph_{\lambda+1}$ has a precise meaning only in the case when the ordinal number λ can be defined by means of the notions of the set theory, i. e. if it is a particular class which is at the same time an ordinal number as, for example, 0, 1 or ω (or $\omega+1$ or ω_1). Let $A, N, \dots$ denote such *particular ordinal numbers*.

Now, since no theorem of the set theory is known which would allow to infer from the assumption $2^{\aleph_\mu} = \aleph_{\mu+1}$ for certain ordinals μ the equality $2^{\aleph_A} = \aleph_{A+1}$ for a A different from these μ , we can formulate the conjecture that the equality $2^{\aleph_A} = \aleph_{A+1}$ cannot be proved for any A from the axioms of Σ^* even if we assume that $2^{\aleph_\mu} = \aleph_{\mu+1}$ is fulfilled for every μ different from A .

It is obvious that until the independence of the generalized continuum hypothesis is proved, the question whether an equality of the form $2^{\aleph_A} = \aleph_{A+1}$ can be proved from the axioms of Σ^* and certain additional assumptions may be investigated only if we assume that it cannot be proved from the axioms of Σ^* alone.

So we hope that some interest may be attached to theorems which

¹ This paper contains the detailed proofs of the results of the author's dissertation submitted in fulfilment of the requirements for the degree of Candidate of Mathematical Sciences. A preliminary report containing these results has been published in the *Zeitschrift f. Math. Logik und Grundlagen d. Math.*, 2 (1956), pp. 131—136.

² For the axiom system Σ^* see in [1].

investigate the connections — or more precisely the absence of connections — of these special cases assuming the independence of some special equalities.

The assumption that the equality $2^{\aleph_A} = \aleph_{A+1}$ cannot be proved from the axioms of Σ^* can be stated in the form that there exists a particular ordinal number $N \neq 0$ (e. g. $N = 1$), such that the assumption $2^{\aleph_A} \geq \aleph_{A+N+1}$ is consistent with the axioms of Σ^* .

The main result of our paper, Theorem 2, asserts that if for a certain kind of particular ordinal numbers A, N the inequality $2^{\aleph_A} \geq \aleph_{A+N+1}$ is consistent with the axioms of Σ^* , then the same is true for the equality $2^{\aleph_A} = \aleph_{A+N+1}$ even if we assume $2^{\aleph_\mu} = \aleph_{\mu+1}$ for every $\mu \geq A+N$.

Choosing specially $N = 1$, Theorem 2 yields the following: If $2^{\aleph_A} = \aleph_{A+1}$ cannot be proved from the axioms of Σ^* , then it cannot be proved even if we assume $2^{\aleph_\mu} = \aleph_{\mu+1}$ for every μ greater than A . This is a partial solution of the formerly stated problem. For other values of the parameter N Theorem 2 has other interesting corollaries. We remark that the independence of the proposition $2^{\aleph_A} = \aleph_{A+1}$ of the hypothesis that for every μ less than A $2^{\aleph_\mu} = \aleph_{\mu+1}$, seems to be a more difficult problem which we cannot solve.

Before stating Theorem 2 in a precise form (viz. specifying the suitable kind of the particular ordinal numbers A, N for which we shall prove the theorem), we shall indicate the way leading to the proof, especially the intermediate theorems.

In what follows we shall use the notations and concepts introduced in [1] as well as the theorems proved there.³ (Note that the letters C, F, R, S also occur as variables in § 2 and § 3 in our paper too.) In addition, in the definition of some metaconcepts as well as in the formulation of some meta-theorems we shall use the symbol $\vdash \varphi$ to signify that the formula φ of the axiom system Σ^* is a theorem in this axiom system.

For the sake of brevity for any particular ordinal numbers A, N the formulas $2^{\aleph_A} \geq \aleph_{A+N+1}$ and $2^{\aleph_A} = \aleph_{A+N+1} \cdot (\mu) (A+N \leq \mu \supset 2^{\aleph_\mu} = \aleph_{\mu+1})$ will be called axioms $F_{A,N}$ and $F_{A,N}^*$, respectively.⁴

The proof of Theorem 2 consists in giving an inner model⁵ in the axiom system $\Sigma^*, F_{A,N}$ for the axiom system $\Sigma^*, F_{A,N}^*$.

³ For the logical notions we also use the symbols $=, \supset, \vee, \cdot (x), (\exists x), (\exists! x)$, but for the use of the parantheses in the formulas we shall make use of the following convention. We shall say that “ $\cdot$ ” ranks ahead of “ $\supset$ ”, and rank our operators in the order in which we have listed them above.

⁴ The operation $X \dot{+} Y$ appearing in the formulas is not defined in [1]. However, it is a straightforward generalization of the operation $X \dot{+} 1$ defined in [1], associating to any two ordinals α, β their sum $\alpha \dot{+} \beta$ in the usual sense. For the definition of $X \dot{+} Y$ see 2.1.4, p. 328.

⁵ For the concept of inner model see [2], p. 165.

In order to define this model and to prove the properties of it from the axioms of Σ^* , $F_{A,N}$, it is necessary to develop the abstract set theory, more detailed from the axioms of set theory as it is done in Chapters II—IV of [1]. We are going to do it in § 2. If a theorem is stated without further specifications, this means that it follows from the axioms of Σ . If the axiom E is needed for a theorem or a definition, its number is marked by *, just like in [1].

In the method of the proofs we also follow [1]. In connection with this we cite the following part of the introduction of [1]:

“Although the definitions and theorems are mostly stated in logistic symbols, the theory developed is not to be considered as a formal system but as an axiomatic theory in which the meaning and the properties of the logical symbols are presupposed to be known. However, to everyone familiar with mathematical logic it will be clear that the proofs could be formalized, using only the rules of HILBERT’S “Engeren Funktionenkalkul”. In several places, we are concerned with metamathematical considerations about the notions and propositions of the system Σ^* . However, the only purpose of these metamathematical considerations is to show how the proofs of theorems of a certain kind can be accomplished by a general method.”

We have to remark here that Theorem 2 and its corollaries are, as a matter of course, not theorems of set theory but they are also metamathematical theorems about set theory in a somewhat more general sense as metatheorems mentioned above. In the supplementary part of our paper in § 6 we shall prove theorems of similar character, and so in § 6 metatheorem, metaconcept are used in this more general sense. Anyway we wish to note that after the complete formalisation of the axiom system all these theorems proved in this paper might be considered as arithmetical ones of constructive nature.

By the *model determined by the class M* we understand the inner model, the fundamental notions of which are defined by the formulas

$$\mathfrak{G}\mathfrak{I}_M(X) \equiv X \subseteq M.(u)(u \in M \supset X.u \in M),$$

$$\mathfrak{M}_M(X) \equiv X \in M,$$

$$X \in_M Y \equiv \mathfrak{M}_M(X). \mathfrak{G}\mathfrak{I}_M(Y). X \in Y.$$

The model determined by the class M will be denoted by $\mathcal{A}_M$.

We say that a class M is *almost universal*,⁶ if for any of its subsets u it contains an element v such that $u \subseteq v$.

⁶ The universal class (and by Axiom D only this class) has the property of containing any of its subsets as element. Hence the expression “almost universal” for the above property.

In § 3 we shall give a sketch of the proof of the following

LEMMA.* *If the class M is complete, closed with respect to the fundamental operations and almost universal, then the model determined by the class M satisfies the axiom system Σ .⁷*

Using this lemma we can prove the following

THEOREM 1*.⁸ *For any pair λ, ν of ordinals, if $2^{\aleph_\lambda} \cong \aleph_{\lambda+\nu}$, then there exists a complete and almost universal class M such that $\mathcal{J}_M$ satisfies the axiom system Σ^* and, in addition, the following formulas are fulfilled:*

$$(1) \quad \alpha \leq \lambda + \nu + 1 \supset \aleph_M(\alpha) = \aleph(\alpha),$$

$$(2) \quad (2^{\aleph_M^\lambda})_M = \aleph_M(\lambda + \nu + 1),$$

$$(3) \quad \lambda + \nu \leq \mu \supset (2^{\aleph_M^\mu})_M = \aleph_M(\mu + 1).$$

If the particular ordinal number $\mathcal{A}$ is absolute with respect to every model determined by a complete and almost universal class M satisfying the axioms of Σ^* for which (a) ($\alpha \leq \mathcal{A} + 1 \supset \aleph_M(\alpha) = \aleph(\alpha)$) is fulfilled, then we call $\mathcal{A}$ an *absolutely definable (particular) ordinal number in the weaker sense* (see Definition 5.4 on p. 365) it can be proved e. g. that $0, 1, 2, \dots, n, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega + \omega, \dots, \omega_1, \dots, \omega_{\omega_1}, \dots$ are absolutely definable ordinal numbers.

If $\mathcal{A}, N$ are absolutely definable ordinal numbers satisfying axiom $F_{\mathcal{A}, N}$, then by Theorem 1 there exists a class M such that $\mathcal{A}$ and N are absolute with respect to $\mathcal{J}_M$ by (1), and this model satisfies beyond the axiom system Σ^* axiom $F_{\mathcal{A}, N}^*$ as well, for the absoluteness of $\mathcal{A}$ and N and of the other concepts, occurring without the subscript M , implies that the conjunction of (2) and (3) is just the relativized of $F_{\mathcal{A}, N}^*$ with respect to the model $\mathcal{J}_M$.⁹ Hence we get Theorem 2 in the following precise form:

THEOREM 2. *If $\mathcal{A}$ and N are absolutely definable ordinal numbers and the axiom system $\Sigma^*, F_{\mathcal{A}, N}$ is consistent, then the same is true for the axiom system $\Sigma^*, F_{\mathcal{A}, N}^*$.*

⁷ The lemma in a somewhat weaker form is stated without proof in [3]. The concept of the model determined by a class, as well as the lemma, are, respectively, immediate generalizations of the model $\mathcal{A}$ determined by the class L (the class of the constructible sets) and of the theorem, proved in [1], that the model $\mathcal{A}$ satisfies the axiom system Σ . The lemma is a theorem formalizable and provable in the axiom system Σ^* .

⁸ For Theorem 1 see § 4. Theorem 1 is also a formalizable and provable one in the axiom system Σ^* . The subscript M , as usual, indicates the relativization of the corresponding concept to $\mathcal{A}_M$.

⁹ This sketch of the proof does not show quite clearly the constructive character of Theorem 2 because of the expression "there exists a class M " taking place in it, but this might be obvious by the proof given in § 5, p. 366.

The most essential and, of course, most extensive part of the proof of our result is the proof of Theorem 1. This will be given in § 4.¹⁰

In § 5 we shall give the proof of Theorem 2 and of the corollaries. As to the corollaries of Theorem 2 see pp. 366—368. Here we mention only $\mathbf{K}_3$ which seems to be the most interesting from set-theoretical point of view and which asserts that from any disproof of the so-called Lusin hypothesis $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ one can construct a proof of the continuum hypothesis $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Finally, in § 6 we deal with the range of the absolutely definable particular ordinal numbers, i. e. the range of the validity of our results. We shall prove that for the notion of Church—Kleene's recursive ordinal number a corresponding metaconcept for the axiom system Σ^* can be defined, and that every particular ordinal number in the range of this metaconcept is absolutely definable.¹¹

Moreover, we prove the more general theorem that every particular ordinal number which can be defined by a formula of the model $\mathcal{J}$ is absolutely definable.¹² The construction of non-denumerable absolutely definable ordinal numbers is made possible by a theorem which asserts that the particular ordinal number ω_A is absolutely definable if the same is true for $\mathcal{A}$.

§ 2. Preliminary results

2.1. In this section we prove some simple theorems of Σ (or of Σ^* , respectively) and we give the definition of some set-theoretical concepts not defined in [1].

We may remark that if after the definition of a concept nothing is said about its normality, it is normal and its normality will be proved by the method explained on p. 13 of [1] in the index to be found at the end of our paper.

In what follows we shall often refer to the following simple theorems not stated explicitly in [1]:

$$2.1.1. \quad u \in B^c(X \equiv (\exists v)(v \in X \cdot \langle uv \rangle \in B)).$$

$$2.1.2. \quad \mathfrak{Fnc}(A) \supset (u \in A^c(Y \equiv (\exists v)(v \in Y \cdot u = A^c(v))).$$

The first one is a direct consequence of the definition [1], 4.52, while the second follows from this by [1], 4.61, 4.63, 4.65.

¹⁰ In the first part of § 4 we are going to give a detailed description of the ideas used in the proof and point out where the proof runs parallel to the proof of [1] of GÖDEL and where we need an essentially new idea for carrying out the proof.

¹¹ See 6.2.

¹² See 6.1.

In [1], 7.5 the following theorem is proved concerning the definition by means of transfinite induction:

$$(G)(\exists! F)(F \tilde{\mathfrak{N}} \text{On} . (\alpha) (F^t \alpha = G^t(F \upharpoonright \alpha))).$$

It follows that if the class G depends on the parameters $X_1, \dots, X_n$, i. e. $\mathfrak{S}(X_1, \dots, X_n)$ is a given operation, there exists an operation $\tilde{\mathfrak{S}}(X_1, \dots, X_n)$ such that

$$(1) \quad \tilde{\mathfrak{S}}(X_1, \dots, X_n) \tilde{\mathfrak{N}} \text{On} . (\alpha) (\tilde{\mathfrak{S}}(X_1, \dots, X_n)^t \alpha = \mathfrak{S}(X_1, \dots, X_n)^t (\tilde{\mathfrak{S}}(X_1, \dots, X_n) \upharpoonright \alpha))$$

for every $X_1, \dots, X_n$.

The following metatheorem is needed:

M_7 . If the operation $\mathfrak{S}(X_1, \dots, X_n)$ is normal, there exists a normal operation $\tilde{\mathfrak{S}}(X_1, \dots, X_n)$ defined by the formula (1).

PROOF. By M_2 [1] there exists a uniquely determined class K such that

$$(2) \quad f \in K \equiv (\exists \beta) (f \tilde{\mathfrak{N}} \beta . (\alpha) (\alpha \in \beta \supset f^t \alpha = \mathfrak{S}(X_1, \dots, X_n)^t (f \upharpoonright \alpha)))$$

for every $X_1, \dots, X_n$. Therefore an operation $\mathfrak{R}(X_1, \dots, X_n)$ is defined by (2) and the normality of $\mathfrak{S}(X_1, \dots, X_n)$ implies that $\mathfrak{R}(X_1, \dots, X_n)$ is normal. It is proved in [1], 7.5 that if the class K satisfies (2), then $F = \tilde{\mathfrak{S}}(K)$ satisfies the formula

$$F \tilde{\mathfrak{N}} \text{On} . (\alpha) (F^t \alpha = \mathfrak{S}(X_1, \dots, X_n)^t (F \upharpoonright \alpha)).$$

Hence the operation $\tilde{\mathfrak{S}}(X_1, \dots, X_n) = \tilde{\mathfrak{S}}(\mathfrak{R}(X_1, \dots, X_n))$ satisfies the formula (1), and $\mathfrak{R}(X_1, \dots, X_n)$ being normal, it is normal.

Concerning the inductive definition of functions over the set of integers the following theorem is proved in [1], 8.45:

$$(a) (G)(\exists! F)(F \tilde{\mathfrak{N}} \omega . F^t 0 = a . (k) (F^t k + 1 = G^t(F^t k))).$$

Analogously to M_7 we need a corresponding theorem for normal operations.

M_8 . Let $\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n)$ and $\mathfrak{S}(Y, Z, X_1, \dots, X_n)$ be normal operations. Suppose that $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n))$ and $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}(y, z, X_1, \dots, X_n))$. Then a normal operation $\tilde{\mathfrak{S}}(X_1, \dots, X_n)$ can be defined by the following formulas:

$$(3) \quad \begin{aligned} &\tilde{\mathfrak{S}}(X_1, \dots, X_n) \tilde{\mathfrak{N}} \omega, \\ &\tilde{\mathfrak{S}}(X_1, \dots, X_n)^t 0 = \mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n), \\ &\tilde{\mathfrak{S}}(X_1, \dots, X_n)^t k + 1 = \mathfrak{S}(k, \tilde{\mathfrak{S}}(X_1, \dots, X_n)^t k, X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

PROOF. First we define an operation $\mathfrak{S}_1(X_1, \dots, X_n)$ by the stipulations

$$(4) \quad \begin{aligned} &\mathfrak{S}_1(X_1, \dots, X_n) \tilde{\mathfrak{N}} V, \\ &\mathfrak{S}_1(X_1, \dots, X_n)^t 0 = \mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

If there exists a k such that $\mathfrak{D}(x) = k + 1$, then $\mathfrak{G}_1(X_1, \dots, X_n)'x = \mathfrak{G}(k, x^k, X_1, \dots, X_n)$, and $\mathfrak{G}_1(X_1, \dots, X_n)'x = 0$ in the other cases.

It is easy to verify that the assumptions of M_8 imply the existence and the normality of $\mathfrak{G}_1(X_1, \dots, X_n)$. By M_7 there exists a normal operation $\mathfrak{F}_1(X_1, \dots, X_n)$ such that

$$(5) \quad \begin{aligned} &\mathfrak{F}_1(X_1, \dots, X_n) \mathfrak{F}n \text{ On}, \\ &\mathfrak{F}_1(X_1, \dots, X_n)' \alpha = \mathfrak{G}_1(X_1, \dots, X_n)'(\mathfrak{F}_1(X_1, \dots, X_n) \upharpoonright \alpha). \end{aligned}$$

It follows from (4) and (5) that $\mathfrak{F}_1(X_1, \dots, X_n)$ satisfies the second and the third formulas in (3). Put $\mathfrak{F}(X_1, \dots, X_n) = \mathfrak{F}_1(X_1, \dots, X_n) \upharpoonright \omega$. Then $\mathfrak{F}$ is normal and satisfies the formulas (3). Using once more the normality of the operations $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{G}$ one can prove by induction on k that if the formulas (3) are fulfilled by F_1 and F_2 instead of $\mathfrak{F}(X_1, \dots, X_n)$, then $F_1'k = F_2'k$ for every k , hence $F_1 = F_2$ by [1], 4.67. It follows that the normal operation $\mathfrak{F}(X_1, \dots, X_n)$ constructed above is defined by the formulas (3).

Now we are going to define the operation $X \dot{+} Y$ mentioned in the Introduction.¹³

First we define an operation $\mathfrak{N}(X)$ as follows:

$$2.1.3. \quad \text{DEF.} \quad \mathfrak{N}(X) \mathfrak{F}n \text{ On. } (\mathfrak{D}(X) \supset (\beta) (\mathfrak{N}(X)' \beta = X + \mathfrak{N}(X)' \beta)). \\ .(\sim \mathfrak{D}(X) \supset (\beta) (\mathfrak{N}(X)' \beta = 0)).$$

We have to prove the existence of $\mathfrak{N}(X)$. Let us construct $\mathfrak{N}(X)$. The operation $\mathfrak{G}(X)$ is defined as follows:

$$\mathfrak{G}(X) \mathfrak{F}n V.$$

$$(o) \quad \begin{aligned} &(\mathfrak{D}(X) \supset (y) (\mathfrak{G}(X)' y = X + \mathfrak{B}(y))) \\ &(\sim \mathfrak{D}(X) \supset (y) (\mathfrak{G}(X)' y = 0)). \end{aligned}$$

If X is an ordinal number, then it is a set, therefore in this case $X + \mathfrak{B}(y)$ is a set, too, by [1], 5.13, 5.16. Thus to every class X there exists exactly one class $\mathfrak{G}(X)$ satisfying the formula (o) by M_5 [1], and it is easy to verify that the operation $\mathfrak{G}(X)$ defined by the formula (o) is normal.¹⁴

¹³ We have to remark that, as to the simplicity of the problem in question, the following discussion seems to be rather complicated. The reason for this is that the axiomatical theory of the "operations" of ordinal numbers is not elaborated, consequently there are no general methods to our disposal.

¹⁴ All the concepts appearing in (o) are normal. But the definition of $\mathfrak{G}(X)$ has to have the form $u \in \mathfrak{G}(X) \equiv \varphi(u, X)$ where φ is normal. But this modification may be carried out without difficulties.

Now by M, there exists a normal operation $\mathfrak{N}(X)$ satisfying the formula

$$(oo) \quad \mathfrak{N}(X) \text{ is } On. (\beta) (\mathfrak{N}(X)^{\beta} = \mathfrak{G}(X)^{\beta} (\mathfrak{N}(X) \upharpoonright \beta)).$$

This operation $\mathfrak{N}(X)$ satisfies the definition 2.1.3 for every X . In fact, $\mathfrak{N}(X) \text{ is } On$ for every X , if X is an ordinal number, then $\mathfrak{N}(X)^{\beta} = X + \mathfrak{N}(X) \upharpoonright \beta = X + \mathfrak{N}(X)^{\beta}$, if X is not an ordinal number, then $\mathfrak{N}(X)^{\beta} = \mathfrak{G}(X)^{\beta} (\mathfrak{N}(X) \upharpoonright \beta) = 0$ by (o) and (oo). On the other hand, from [1], 7.5 it follows that for every class X there exists only one class Y which satisfies the definition 2.1.3 (with Y instead of $\mathfrak{N}(X)$), and therefore the operation $\mathfrak{N}(X)$ constructed above is defined by 2.1.3 and it is normal.

We define the operation $X \dot{+} Y$.¹⁵

2.1.4. DEF. $(\mathfrak{N}(X), \mathfrak{N}(Y) \supset X \dot{+} Y = \mathfrak{N}(X)^{\beta} (Y), (\sim (\mathfrak{N}(X), \mathfrak{N}(Y)) \supset X \dot{+} Y = X + \{X\})$.

2.1.5. $u \in \alpha \dot{+} \beta \equiv u \in \alpha \vee (\exists \xi) (\xi < \beta, \alpha \dot{+} \xi = u)$.

PROOF. $\alpha \dot{+} \beta = \mathfrak{N}(\alpha)^{\beta}$ by 2.1.4 and $\mathfrak{N}(\alpha)^{\beta} = \alpha + \mathfrak{N}(\alpha)^{\beta}$ by 2.1.3. Hence $u \in \alpha \dot{+} \beta \equiv u \in \alpha \vee u \in \mathfrak{N}(\alpha)^{\beta}$. But, $\mathfrak{N}(\alpha)$ being a function, $u \in \mathfrak{N}(\alpha)^{\beta} \equiv (\exists \gamma) (\gamma \in \beta, \mathfrak{N}(\alpha)^{\gamma} = u)$ by 2.1.2. Taking into account that all the elements of β are the ordinal numbers ξ less than β , 2.1.5 is proved.

2.1.5 is the usual inductive definition of the "sum of two ordinal numbers" in the non-axiomatic set theory. The following properties of the operation $X \dot{+} Y$ are to be deduced from 2.1.5 without difficulties:

2.1.6. $\mathfrak{N}(\alpha \dot{+} \beta); \alpha \dot{+} 0 = \alpha; \alpha \dot{+} (\beta \dot{+} 1) = (\alpha \dot{+} \beta) \dot{+} 1;$
 $\alpha \dot{+} \beta \equiv (\exists \xi) (\xi \neq 0, \alpha \dot{+} \xi = \beta).$

The proofs are left to the reader.

The following corollaries of [1], 7.62 are needed:

2.1.7. $A \mathfrak{W}_E R, \mathfrak{N}rd(X), \mathfrak{N}rd(Y), G \text{ isom}_{E,E}(A, X), H \text{ isom}_{E,E}(A, Y) \supset X = Y, G = H$, i. e. a well-ordered class can be isomorphic to at most one ordinal.

2.1.8. $A \subseteq On, B \subseteq On, G \text{ isom}_{E,E}(A, B); H \text{ isom}_{E,E}(A, B) \supset G = H$.

As it is mentioned in [1], p. 6, axiom E is a very strong form of the axiom of choice. One can prove from axiom E that the whole universe of sets can be well-ordered.

2.1.9.* $(\exists W) (V \mathfrak{W}_E W)$.

¹⁵ The operation $X \dot{+} Y$ is the generalization of the operation $X \dot{+} 1$ defined in [1], 7.4. The extension of the operation $\alpha \dot{+} \beta$ for arbitrary classes X, Y is to be executed in such a way that for every X and for $Y = 1$ the operation $X \dot{+} Y$ shall be equal to the operation $X \dot{+} 1$.

We shall make use of this theorem in the proof of the Lemma. However, we believe that it is not necessary to give here a detailed proof of it, we shall only give a sketch of proving it.

Using axiom D one can define in Σ a function Ra which associates to every set x an ordinal number, called the rank of the set x , in such a manner that $Ra'x = 0$ and every set x of the rank α is a subset of the class containing the sets of rank less than α as elements. Moreover, one can prove that for any α the class of the sets x of rank α is a set.¹⁶ Let r_α denote this set. According to the well-ordering theorem proved in [1], 7.71, each of the sets r_α has a well-ordering and it is easy to see that the class of all well-orderings of a set is a set. Using once more axiom E one can define a function which associates to every set r_α one of its well-orderings w_α . Now the well-ordering W of V may be defined as follows:

$$xWy \equiv Ra'x < Ra'y \vee Ra'x = Ra'y . xw_\alpha y.$$

It is obvious that V is well-ordered by W . We remark that every proper W -section of V is a set, and therefore V is isomorphic to On with respect to W and E by [1], 7.7.1.

2.1.10.* $m \subseteq \omega_{\alpha+1}, \bar{m} < \omega_{\alpha+1} \supset (\exists \delta) (\delta < \omega_{\alpha+1}, m \subset \delta)$, i. e. to every subset m of $\omega_{\alpha+1}$, if m is of power less than $\omega_{\alpha+1}$, there exists a $\delta < \omega_{\alpha+1}$ such that all the elements of m are less than δ .

PROOF. Put $\delta = \mathfrak{S}(m) + 1$. $m \subset \delta$ by [1], 4.451. If $\gamma \in m$, then $\gamma < \omega_{\alpha+1}$, and therefore $\gamma < \omega_{\alpha+1}$ by [1], 8.26. It follows — applying [1], 8.64 with I instead of F — that $\mathfrak{S}(m) < \omega_{\alpha+1}$, hence $\delta < \omega_{\alpha+1}$ by [1], 8.63. But then $\delta < \omega_{\alpha+1}$, since $\omega_{\alpha+1} \leq \delta$ would imply $\omega_{\alpha+1} \leq \delta$ by [1], 8.28.

2.1.11. DEF. We introduce the symbols $\mathfrak{Cl}_{\text{lo}\mathfrak{s}_2}(A, R)$ and $\mathfrak{Cl}_{\text{lo}\mathfrak{s}_3}(A, R)$ to denote that A is closed with respect to R as diadic relation and A is closed with respect to R as triadic relation, respectively.¹⁷

2.1.12. $\mathfrak{Cl}_{\text{lo}\mathfrak{s}_n}(A, R), \mathfrak{Cl}_{\text{lo}\mathfrak{s}_n}(B, R) \supset \mathfrak{Cl}_{\text{lo}\mathfrak{s}_n}(A.B, R)$ for $n = 2, 3$.

PROOF. $R^{((A)^{n-1} \subseteq A$ and $R^{((B)^{n-1} \subseteq B$ by the assumption. $(A.B)^{n-1} \subseteq A^{n-1}$, $(A.B)^{n-1} \subseteq B^{n-1}$, and therefore $R^{((A.B)^{n-1} \subseteq R^{((A)^{n-1} \subseteq A}$, $R^{((A.B)^{n-1} \subseteq R^{((B)^{n-1} \subseteq B$ by the monotony property of the operation $X^{((Y$ stated in [1], 4.86.

In [1], 8.72 the concept of the closure of a class X with respect to $R_1, \dots, R_i$ and with respect to $S_1, \dots, S_j$ as triadic relations is introduced.

Let $[X]_{(R_1 \dots R_i)(S_1 \dots S_j)}$ denote the closure of X .

¹⁶ The definition of such a function Ra in Σ is elaborated in details in [2].

¹⁷ For the definition of this concepts see [1], 8.7 and 8.71.

2.1.13.* DEF. For every $X, R_1, \dots, R_i, S_1, \dots, S_j$, $[X]_{(R_1, \dots, R_i)(S_1 \dots S_j)}$ is equal to the uniquely determined class Y satisfying the formulas

$$\begin{aligned} & \mathfrak{M}(X). \mathfrak{U}_n(R_1). \dots \mathfrak{U}_n(R_i). \mathfrak{U}_n(S_1). \dots \mathfrak{U}_n(S_j). \mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{S}_2(Y, R_1). \dots \mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{S}_2(Y, R_i). \\ & . \mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{S}_3(Y, S_1). \dots \mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{S}_3(Y, S_j). (Z) (X \subseteq Z. \mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{S}_2(Z, R_1). \dots \mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{S}_2(Z, R_i). \\ & . \mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{S}_3(Z, S_1). \dots \mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{S}_3(Z, S_j) \supset Y \subseteq Z) \vee \sim (\mathfrak{M}(X). \mathfrak{U}_n(R_1). \dots \\ & . \mathfrak{U}_n(R_i). \mathfrak{U}_n(S_1) \dots \mathfrak{U}_n(S_j)). Y = V. \end{aligned}$$

The existence of the operation $[X]_{(R_1, \dots, R_i)(S_1, \dots, S_j)}$ is assured by [1], 8.73 and its normality may be seen from the inductive definition of the closure of a set given there, referring to metatheorem M_8 .

$$2.1.14.* \text{ DEF. } 2^{\bar{x}} = \overline{\mathfrak{P}(X)}.$$

$$2.1.15.* \quad 2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha, \quad 2^{\aleph_\alpha^\omega} \geq \aleph_{\alpha+1}.$$

By [1], 8.32

$$2.1.16.* \quad \bar{x} = \bar{y} \supset 2^x = 2^y.$$

PROOF. If $\bar{x} = \bar{y}$, then $x \simeq y$ by [1], 8.25. Let h be a function such that $\mathfrak{U}_2(h)$, $\mathfrak{D}(h) = x$ and $\mathfrak{B}(h) = y$. By M_5 [1] there exists a function H defined on $\mathfrak{P}(x)$ such that $H^u = h^u$ for every $u \in \mathfrak{P}(x)$. It is obvious that $\mathfrak{U}_2(H)$, $\mathfrak{D}(H) = \mathfrak{P}(x)$ and $\mathfrak{B}(H) = \mathfrak{P}(y)$. Consequently $\overline{\mathfrak{P}(x)} = \overline{\mathfrak{P}(y)}$.

$$2.1.17.* \quad \bar{x} \leq \bar{y} \supset 2^x \leq 2^y.$$

PROOF. $2^x = 2^{\bar{x}}$ and $2^y = 2^{\bar{y}}$ by 2.1.16. But $\bar{x} \leq \bar{y}$ implies that $\bar{x} \subseteq \bar{y}$, and therefore $\mathfrak{P}(x) \subseteq \mathfrak{P}(y)$, hence $2^x \leq 2^y$ by [1], 8.28.

2.2. We have already defined the model determined by the class M in the Introduction. Let us consider here this concept more detailed. The notions $\mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{S}_M(X)$, $\mathfrak{M}_M(X)$, $X \in_M Y$ depend on the class M . We introduce the symbols $\mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{S}(X, M)$, $\mathfrak{M}(X, M)$, $\mathfrak{E}(X, Y, M)$ to denote them.

$$2.2.1. \text{ DEF. } \mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{S}(X, M) \equiv X \subseteq M. (u) (u \in M \supset u.X \in M).$$

$\mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{S}(X, M)$ is denoted briefly by $\mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{S}_M(X)$, and if $\mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{S}(X, M)$ holds, then X is said to be an M -class.

$$2.2.2. \text{ DEF. } \mathfrak{M}(X, M) \equiv X \in M.$$

$\mathfrak{M}(X, M)$ is denoted briefly by $\mathfrak{M}_M(X)$, and if $\mathfrak{M}_M(X)$ holds, then X is said to be an M -set.

$$2.2.3. \text{ DEF. } \mathfrak{E}(X, Y, M) \equiv \mathfrak{M}(X, M), \mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{S}(Y, M). X \in Y.$$

$\mathfrak{E}(X, Y, M)$ is denoted briefly by $X \in_M Y$, and if $X \in_M Y$ holds, X is said to be an M -element of Y .

The relativized and the absoluteness of a concept is defined only with respect to the model $\mathcal{A}$ in [1].

The definition of the relativization and of the absoluteness is given for inner models generally e. g. in [2]. However, it is obvious that some general remarks about relativization and absoluteness announced in [1] (for example [1], 10.18) may be used for the relativization and absoluteness with respect to every inner model.

If the relativized of a particular class A , operation $\mathfrak{A}$, notion $\mathfrak{B}$, variable I' exists with respect to the model $\mathcal{A}_M$, we denote it by $A_M, \mathfrak{A}_M, \mathfrak{B}_M, I'_M$, respectively. If there is no possibility of misunderstanding, the relativized of the class and set variables $X, Y, \dots, x, y, \dots$ will be denoted by $X, Y, \dots, \bar{x}, \bar{y}, \dots$ instead of $X_M, Y_M, \dots, x_M, y_M, \dots$, respectively.

It is obvious that $\mathcal{A}_M$ is not a set-theoretical concept, and so, for example, the statement "there exists a model $\mathcal{A}_M$ such that in the model $\mathcal{A}_M$ all the axioms of Σ^* hold" can not be formalized in our system. However, the property of the class M that the axioms of Σ or of Σ^* hold in the model determined by the class M is easy to formalize satisfactory.

Let us write all the axioms of Σ^* in a form not containing free variables and concepts other than $\mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{s}(X)$, $\mathfrak{M}\mathfrak{i}(X)$ and $X \in M$. The relativized of this form of the axioms always exists (i. e. we may write in this formulas $\mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{s}(X, M)$, $\mathfrak{M}\mathfrak{i}(X, M)$, $\mathfrak{C}(X, Y, M)$ instead of $\mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{s}(X)$, $\mathfrak{M}\mathfrak{i}(X)$, $X \in Y$, respectively) and each of these formulas contains at most the free variable M . Let us denote the conjunction of the relativized axioms of Σ and Σ^* by $\mathfrak{P}_0(M)$ and $\mathfrak{P}^*(M)$, respectively.¹⁸ $\mathfrak{P}_0(M)$ and $\mathfrak{P}^*(M)$ formalize that the axioms of Σ or Σ^* hold in $\mathcal{A}_M$.

From general logical considerations follows

M_9 . If $\mathfrak{P}_0(M)$ (or $\mathfrak{P}^*(M)$) and the formula q of Σ (or of Σ^*) is provable in Σ (in Σ^*), then q holds in the model (i. e. if q is provable e. g. in Σ , then $(M)(\mathfrak{P}_0(M) \supset q_M)$ is provable in Σ too).

Another special kind of inner models has been introduced by SHEPHERDSON in [2]. The inner model $\mathfrak{M}$ satisfying the axioms of group A, B, C of Σ is said to be a complete model,¹⁹ provided the following conditions hold:

- (i) $(X)(Y)(X \in_{\mathfrak{M}} Y \equiv \mathfrak{M}\mathfrak{i}_{\mathfrak{M}}(X) \cdot \mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{s}_{\mathfrak{M}}(Y) \cdot X \in Y)$,
- (ii) $(A_{\mathfrak{M}})(X)(X \in A_{\mathfrak{M}} \supset \mathfrak{M}\mathfrak{i}_{\mathfrak{M}}(X))$

where the subscript $\mathfrak{M}$ indicates the relativization with respect to the model $\mathfrak{M}$.

SHEPHERDSON has proved in [2] that the concepts defined in [1] absolute with respect to $\mathcal{A}$ are mostly absolute with respect to any complete model.

¹⁸ We need not the concrete form of these formulas. We are going to use them only to formalize some of our theorems and to make clear the proof of Theorem 2.

¹⁹ See [2].

We are going to make use of these results, and therefore we need the following theorem:

2.2.4. If for a class M the axioms A, B, C hold in $\mathcal{A}_M$, then $\mathcal{A}_M$ is a complete model.

PROOF. The formula (i) is fulfilled by the definition 2.2.3 of $\mathfrak{C}(X, Y, M)$. The variable A_M runs over the M -classes. But $A_M \subseteq M$ for every M -class by 2.2.1, therefore $X \in A_M$ implies that $X \in M$, but then X is an M -set by 2.2.2 and (ii) is fulfilled too. Now for the convenience of the reader we are going to recapitulate the results of SHEPHERDSON [2] which will be used in this paper.

2.2.5. If for a class M the axioms of A, B, C hold in the model $\mathcal{A}_M$, then, $\mathcal{A}_M$ being a complete model by 2.2.4, the following concepts are absolute with respect to $\mathcal{A}_M$, by [2], 2.10, 2.12, 2.317, 2.320, 2.322, 2.312(b):

$$\begin{aligned} &X \in Y, X \subseteq Y, \mathfrak{C}_r(X, Y), \mathfrak{C}_m(X, Y), \mathfrak{In}(X), \mathfrak{In}_2(X), \\ &X \times Y, X^2, X^3, \dots, \mathfrak{Rel}'(X), \mathfrak{Rel}_3(X), \mathfrak{D}(X), \mathfrak{Q}(X), X.Y, \\ &\mathfrak{Con}_i(X) \ (i=1, 2, 3), X \upharpoonright Y, A^{(X)}, X - Y, X + Y, A^{\setminus} X, \\ &\mathfrak{E}(X), \mathfrak{Sim}(X), \mathfrak{Mar}(X), \mathfrak{Fnc}(X), X \mathfrak{Fnc} Y, \\ &\mathfrak{F}_i(X, Y) \text{ for } i=2, \dots, 8, \mathfrak{Comp}(X), X \mathfrak{Con} Y, 0, 1, \dots, \omega, \\ &\mathfrak{Fin}(X), X < Y, X \leq Y, \mathfrak{Ord}(X). \end{aligned}$$

Taking into account that $V_M = M$ for $\mathcal{A}_M$ under the conditions of 2.2.5 the following equalities hold:

2.2.6. $-_M X = M - \bar{X}$, $E_M = E.M$, $\mathfrak{P}_M(\bar{X}) = M.\mathfrak{P}(X)$, $On_M = On.M$, $On_M \in On \vee On_M = On$ by [2], 2.213, 2.315, 2.316.

If, in addition, $\mathfrak{M}(X)$ is absolute with respect to $\mathcal{A}_M$, the following concepts are absolute with respect to $\mathcal{A}_M$:

2.2.7. $\{X, Y\}$, $\langle X, Y \rangle$, $\langle X, Y, Z \rangle$, ..., $X \dot{+} 1$, On , $\alpha, \beta, \gamma, \dots, L$ (the class of constructible sets).

Now for the convenience of the reader we collect here some meta-theorems used in this paper to prove the absoluteness of a concept:²⁰

AB₁. If all the concepts except $X_1, \dots, X_n$ appearing in the formula $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ are absolute, then φ is absolute.

AB₂. If the relativized of the operation $\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n)$ (particular class A) exists, then $\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n)$, (A) is an M -class for every $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n$ (see [1], 10.1).

²⁰ In these theorems the subscript M always denotes the relativization with respect to the model $\mathcal{A}_M$.

AB₃. If the relativized of an operation $\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n)$ exists and $\mathfrak{A}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$ satisfies the relativized of the defining postulate of $\mathfrak{A}$ for every $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n$, then $\mathfrak{A}$ is absolute. Similarly for a particular class A (see [1], p. 47).

AB₄. If $\mathfrak{A}_M$ and A_M exist and the defining postulates of $\mathfrak{A}$ and A are absolute, then $\mathfrak{A}$ and A are absolute (see [1], p. 51).

AB₅. If the operations $\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n)$, $\mathfrak{B}_1(X_1, \dots, X_m), \dots, \mathfrak{B}_n(X_1, \dots, X_m)$ are absolute, then the same is true for the operation $\mathfrak{C}(X_1, \dots, X_m)$ defined by the equality

$$\mathfrak{C}(X_1, \dots, X_m) = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}_1(X_1, \dots, X_m), \dots, \mathfrak{B}_n(X_1, \dots, X_m))$$

(see [1], 10.18).

AB₆. Let $\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n, U)$ be an operation, I' a variable of the range $\mathfrak{B}(U)$. Suppose that $\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n, I')$ satisfies the formula $\varphi(\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n, X_1, \dots, X_n, I'), (X_1) \dots (X_n) (I') (\exists! Y) \varphi(Y, X_1, \dots, X_n, I')$ and for the classes U for which $\sim \mathfrak{B}(U)$ holds, $\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n, U) = 0$. Then $\mathfrak{A}$ is absolute under the conditions that $\mathfrak{B}(U)$ and 0 are absolute, $\mathfrak{A}_M$ exists and one of the following formulas holds:

$$(1) \quad \varphi(\bar{Y}, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, I') \equiv \varphi_M(\bar{Y}, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, I'),$$

$$(2) \quad \mathfrak{A}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, I') = \mathfrak{A}_M(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, I').$$

PROOF. Let $\psi(Y, X_1, \dots, X_n, U)$ be the defining postulate of $\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n, U)$. By the assumption ψ has the following form:

$$\psi(Y, X_1, \dots, X_n, U) \equiv \mathfrak{B}(U) \cdot \varphi(Y, X_1, \dots, X_n, U) \vee \sim \mathfrak{B}(U) \cdot (Y = 0).$$

By AB₄ it is sufficient to prove that ψ is absolute.

$$\psi_M(\bar{Y}, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, \bar{U}) \equiv \mathfrak{B}(\bar{U}) \cdot \varphi_M(\bar{Y}, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, \bar{U}) \vee \sim \mathfrak{B}(\bar{U}) \cdot (\bar{Y} = 0),$$

since $\mathfrak{B}$ and 0 are absolute. But then $\psi(Y, X_1, \dots, \bar{X}_n, U) \equiv \psi_M(\bar{Y}, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, \bar{U})$ follows from (1) and thus $\mathfrak{A}$ is absolute if (1) holds.

On the other hand, if $\bar{U}$ is an M -class for which $\sim \mathfrak{B}_M(\bar{U})$, then by the absoluteness of $\mathfrak{B}$, $\sim \mathfrak{B}(\bar{U})$, hence $\mathfrak{A}_M(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, \bar{U}) \equiv \mathfrak{A}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, \bar{U}) = 0$ for this $\bar{U}$. Consequently, if (2) holds, then $\mathfrak{A}_M(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, \bar{U}) \equiv \mathfrak{A}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, \bar{U})$ is fulfilled and $\mathfrak{A}$ is absolute in this case too.

We need the following theorems concerning the absoluteness of the concepts $X \mathfrak{I} \mathfrak{S} \mathfrak{O} \mathfrak{M}_{R,S}(Y, Z)$ and $X \vdash Y$:

2.2.8. Under the conditions of 2.2.5 $X \mathfrak{I} \mathfrak{S} \mathfrak{O} \mathfrak{M}_{R,S}(Y, Z)$ is absolute with respect to $\mathcal{A}_M$.

PROOF.

$$\bar{X} \mathfrak{I} \mathfrak{S} \mathfrak{O} \mathfrak{M}_{\bar{R}, \bar{S}}(\bar{Y}, \bar{Z}) \equiv \mathfrak{D}(\bar{X}) = \bar{Y} \mathfrak{B}(\bar{X}) = \bar{Z} \mathfrak{U} \mathfrak{n}_2(\bar{X}).$$

$$\mathfrak{M} \mathfrak{e} \mathfrak{l}(\bar{X}).(u)(v)(u \in \bar{Y}. v \in \bar{Y} \supset (\langle uv \rangle \in \bar{R} \equiv \langle \bar{X}'u, \bar{X}'v \rangle \in \bar{S}))$$

by the definition [1], 6. 4.

$$(\bar{X} \mathfrak{I} \mathfrak{S} \mathfrak{O} \mathfrak{M}_{\bar{R}, \bar{S}}(\bar{Y}, \bar{Z}))_M \equiv \mathfrak{D}(\bar{X}) = \bar{Y} \mathfrak{B}(\bar{X}) = \bar{Z} \mathfrak{U} \mathfrak{n}_2(\bar{X}).$$

$$\mathfrak{M} \mathfrak{e} \mathfrak{l}(\bar{X}).(\bar{u})(\bar{v})(\bar{u} \in \bar{Y}.\bar{v} \in \bar{Y} \supset (\langle \bar{u}\bar{v} \rangle \in \bar{R} \equiv \langle \bar{X}'\bar{u}, \bar{X}'\bar{v} \rangle \in \bar{S}))$$

by 2. 2. 5. Hence it is sufficient to prove that

$$\begin{aligned} (u)(v)(u \in \bar{Y}.v \in \bar{Y} \supset (\langle uv \rangle \in \bar{R} \equiv \langle \bar{X}'u, \bar{X}'v \rangle \in \bar{S})) &\equiv \\ \equiv (\bar{u})(\bar{v})(\bar{u} \in \bar{Y}.\bar{v} \in \bar{Y} \supset (\langle \bar{u}\bar{v} \rangle \in \bar{R} \equiv \langle \bar{X}'\bar{u}, \bar{X}'\bar{v} \rangle \in \bar{S})). \end{aligned}$$

From the left side follows immediately the right side, since every M -set is a set by 2. 2. 2. The reverse implication holds, since if one of the sets u, v is not an M -set, the implication holds vacuously, because by 2. 2. 1 the hypothesis $u \in \bar{Y}.v \in \bar{Y}$ is false. Therefore $X \mathfrak{I} \mathfrak{S} \mathfrak{O} \mathfrak{M}_{R, S}(Y, Z)$ is absolute.

2. 2. 9. Under the conditions of 2. 2. 7 $X \dot{+} Y$ is absolute with respect to $\mathcal{A}_M$.

PROOF.

$$u \in \alpha \dot{+} \beta \equiv u \in \alpha \vee (\exists \xi)(\xi < \beta. u = \alpha \dot{+} \xi)$$

by 2. 1. 5. But 2. 1. 5 may be proved without using axiom D. Therefore from the assumptions it follows that the relativized of this theorem holds, i. e.

$$\bar{u} \in \alpha \dot{+}_M \beta \equiv \bar{u} \in \alpha \vee (\exists \xi)(\xi < \beta. \bar{u} = \alpha \dot{+} \xi)$$

by the absoluteness of the concepts appearing without the subscript M in this formula (2. 2. 5, 2. 2. 7). But this equivalence holds with u instead of $\bar{u}$, since if u is not an M -set, both sides are false. It follows by transfinite induction on β that $\alpha \dot{+} \beta = \alpha \dot{+}_M \beta$ for every α, β . If one of the classes $\bar{X}, \bar{Y}$ is not an ordinal number, then this one is not an ordinal number in the model either by the absoluteness of $\mathfrak{D}(X)$ (2. 2. 7). Therefore in this case we have $\bar{X} \dot{+} \bar{Y} = \bar{X} \dot{+} 1$ and $\bar{X} \dot{+}_M \bar{Y} = \bar{X} \dot{+}_M 1$, hence $\bar{X} \dot{+} \bar{Y} = \bar{X} \dot{+}_M \bar{Y}$ by the absoluteness of the operation $X \dot{+} 1$ (2. 2. 7). So $\bar{X} \dot{+} \bar{Y} = \bar{X} \dot{+}_M \bar{Y}$ holds for every $\bar{X}, \bar{Y}$, and therefore $\bar{X} \dot{+} \bar{Y}$ is absolute.

§ 3. Lemma

In the Introduction we have defined the notion to be *almost universal*. Let $\mathfrak{U}(X)$ denote that the class X is almost universal.

3. 1. DEF. $\mathfrak{U}(X) \equiv (u)(u \subseteq X \supset (\exists v)(v \in X. u \subseteq v))$.

The class X is said to be *closed with respect to the fundamental operations* if $u, v \in X$ implies $\mathfrak{F}_i(u, v) \in X$ for every u, v ($i = 1, \dots, 8$).

3.2. DEF. $\mathfrak{Fcl}(X) \equiv (u)(v)(u \in X, v \in X \supset \mathfrak{F}_1(u, v) \in X, \dots, \mathfrak{F}_8(u, v) \in X)$.

We need the following

LEMMA.* *If the class M is complete, closed with respect to the fundamental operations and almost universal, then the model determined by the class $\mathcal{A}_M$ satisfies the axiom system Σ .*

This lemma is formalizable and provable in the axiom system Σ^* :

3.3.* $\mathfrak{Comp}(M), \mathfrak{Fcl}(M), \mathfrak{Au}(M) \supset \psi_0(M)$.

We have already mentioned that the Lemma is an immediate generalization of the theorem proved in [1], VI which states that the model determined by the class L of the constructible sets satisfies the axiom system Σ . In [1], 9.51, 9.6, 9.63 it is proved that the assumptions of our Lemma are satisfied by the class L . However, in the proof of the theorem mentioned above GÖDEL makes use of two other properties of the class L as well. In [1], 9.87 must be used that the class L has a well-ordering by the construction and in the proof of $(C_1)_L$ GÖDEL makes use of the fact that L , by the construction, has an element F^ω satisfying $(C_1)_L$.

In the proof of Theorem 1 we are going to construct classes M in a similar way to GÖDEL's L and we shall make use of the Lemma to prove that $\mathcal{A}_M$ satisfies the axiom system Σ from these classes M too. These classes M will be well-ordered and $(C_1)_M$ may be verified for these classes without difficulties. However, we think that for the sake of overlooking the discussion it is more suitable to state this Lemma interesting by itself²¹ in this general form.

We shall omit the detailed proof of the Lemma for it may be carried out in the same manner as in [1], VI using the previously proved results in [1], pp. 38—44. Only in the proof of the result $\mathfrak{Cl}_{\mathfrak{S}_M}(M, Q_4^{(A)})$ corresponding to [1], 9.87 must be used axiom E, and we must give a proof of $(C_1)_M$. But first we sketch the proof of the Lemma. Using the completeness of M it is easy to verify that $X \in Y$ is absolute and $(A_1)_M$ is fulfilled. Then, step by step, every notions and operations appearing in the axioms may be proved to be absolute with respect to $\mathcal{A}_M$. From these it follows that $(A_2)_M$ and $(A_3)_M$ are fulfilled. The conditional existence axioms $(A_4)_M, (B_1)_M, \dots, (B_8)_M$ are fulfilled for sets M being closed with respect to the fundamental operations. From this it may be deduced that $E.M, \bar{A}.B, M - \bar{A}, M.(V \times A), \mathfrak{D}(\bar{A}), \mathfrak{Conv}_k(\bar{A})$ ($k = 1, 2, 3$) are M -classes and they satisfy the corresponding relativized axioms of group

²¹ The remark that the Lemma is provable in Σ if we assume that M might be well-ordered has no importance from our point of view, because we have to make use essentially of axiom E in another point of the proof of Theorem 1 too.

B. $(D)_M$ is an immediate consequence of D using the absoluteness of the notions occurring in D.

Now the relativized of the axioms of the group C are fulfilled, because the relativized of the metatheorem M_2 [1] is true for the model (M_2) being proved from the axioms A, B, D), and therefore M -classes may be constructed satisfying these axioms such that these M -classes are sets by the corresponding axiom of group C, and consequently they are M -sets by the absoluteness of $\mathfrak{M}(X)$. However, in the case of the axioms C_2, C_3, C_4 the proof may be carried out in a more direct way.

In the case of axioms C_1 we must argue as follows. By the absoluteness of the notions appearing in C_1 , $(C_1)_M$ is the following formula:

$$(\exists \bar{a})(\sim \mathfrak{U}m(\bar{a}).(\bar{x})(x \in \bar{a} \supset (\exists \bar{y})(\bar{y} \in \bar{a}. \bar{x} \subset \bar{y}))).$$

Let $\varphi(X)$ be the following formula:

$$\varphi(X) \equiv X = 0 \quad (\exists u)(X = u \dot{+} 1). (v)(v \in X \supset (\exists w)(w \in X. v = w \dot{+} 1)).$$

All the concepts appearing in this formula can be defined using only axioms A, B, D, and their normality follows from these axioms as well. Therefore if we define the particular class A by the stipulation $X \in A \equiv \varphi(X)$, then φ_M and A_M exist.

It is easy to verify that $\varphi(X)$ is absolute, and consequently A is absolute by AB_2 . Hence A is an M -class.

But A is ω . In fact, from the definition of A it follows that $0 \in A$, $x \in A \supset x \dot{+} 1 \in A$ and $x \dot{+} 1 \in A \supset x \in A$. $0 \in A$ and $x \in A \supset x \dot{+} 1 \in A$ implies $\omega \subseteq A$. By axiom D, if $A - \omega$ were not empty, then it would have an element x such that $x.(A - \omega) = 0$. But in this case $\varphi(x)$, and consequently $x = u \dot{+} 1$ for an u where $u \in A$ and $u \in x$, and therefore $u \in \omega$, but then $x \in \omega$. But this contradicts $x \in A - \omega$, thus we have $A - \omega = 0$, $A = \omega$. ω is a set, and being an M -class, it is an M -set by the absoluteness of $\mathfrak{M}(X)$. $\omega = \bar{a}$ satisfies axiom $(C_1)_M$.

§ 4. Proof of Theorem 1

THEOREM 1.* For any pair λ, ν of ordinals, if $2^{\aleph_\lambda} \cong \aleph_{\lambda \dot{+} \nu \dot{+} 1}$, then there exists a complete and almost universal class M such that J_M satisfies the axiom system Σ^* and, in addition, the following formulas are fulfilled:

$$(+)\quad \aleph_M^{\aleph_\alpha} = \aleph^{\aleph_\alpha} \text{ for } \alpha \leq \lambda \dot{+} \nu \dot{+} 1,$$

$$(+ +)\quad (2^{\aleph_M^{\aleph_\rho}})_M = \aleph_M^{\aleph_\lambda \dot{+} \nu \dot{+} 1} \text{ for } \lambda \leq \rho < \lambda \dot{+} \nu \dot{+} 1,$$

$$(+ + +)\quad (2^{\aleph_M^{\aleph_\mu}})_M = \aleph_M^{\aleph_\mu \dot{+} 1} \text{ for } \lambda \dot{+} \nu \leq \mu.$$

Theorem 1 is formalizable and provable in Σ^* :

$$(\lambda)(\nu)(2^{\aleph_\lambda} \cong \aleph_{\lambda+\nu+1} \supset (\exists M)(\mathcal{C}omp(M), \mathfrak{A}u(M), \psi_0^*(M)).$$

$$(\alpha)(\alpha \leq \lambda + \nu + 1 \supset \aleph_M(\alpha) = \aleph(\alpha)). (\nu)(\lambda \leq \varrho < \lambda + \nu + 1 \supset (2^{\aleph_M^\varrho})_M = \aleph_M(\lambda + \nu + 1)).$$

$$.(\mu)(\lambda + \nu \leq \mu \supset 2^{\aleph_M^\mu} = \aleph_M(\mu + 1)).$$

The idea of the proof is the following: The assumption $2^{\aleph_\lambda} \cong \aleph_{\lambda+\nu+1}$ implies that the set ω_λ of power $\aleph_\lambda$ (which is constructible as all ordinals are) has at least $\aleph_{\lambda+\nu+1}$ subsets. If we add $\aleph_{\lambda+\nu+1}$ such subsets to the class L , then we have to add not too much further sets to L in order that the model determined by the wider class arising thus should satisfy again the axiom system Σ^* , so that ω_λ will not possess more than $\aleph_{\lambda+\nu+1}$ subsets in that model and the cardinal of the power sets of sets of a cardinal not less than $\aleph_{\lambda+\nu}$ will not increase.

The technical execution of the proof is not so simple. This runs on the following lines. Making use of the assumption $2^{\aleph_\lambda} \cong \aleph_{\lambda+\nu+1}$ we define a function h which establishes a one-to-one mapping of the ordinals less than $\omega_{\lambda+\nu+1}$ onto a subset of $\mathfrak{P}(\omega_{\lambda+\nu+1})$ as well as a function k which associates to every ordinal number less than $\omega_{\lambda+\nu+1}$ a one-to-one mapping of this ordinal number onto its cardinal number.

Writing 12 instead of 9 in the definitions [1] of the particular classes S, J, K_1, K_2 we denote the particular classes thus obtained by S, J, K_1, K_2 again and we define the functions $J_0, \dots, J_{11}$ by $J'_i \langle \alpha \beta \rangle = J' \langle i \alpha \beta \rangle$ for $i < 12$ (instead of $i < 9$).

Analogously to the function F defined in [1], 9.5 we define a function G on the class of all ordinal numbers in the following way:

$$G(\alpha) = G''\alpha \quad \text{for } \alpha \in \mathfrak{B}(J_0),$$

$$G(\alpha) = \mathfrak{F}_i(G(\beta), G(\gamma)) \quad \text{for } \alpha \in \mathfrak{B}(J_i) \quad (i = 1, \dots, 8);$$

if $\alpha < \omega_{\lambda+\nu+1}$,

$$G(\alpha) = G(\beta, On) \quad \text{for } \alpha \in \mathfrak{B}(J_9),$$

$$G(\alpha) = G(\beta, h(G(\gamma)) \quad \text{for } \alpha \in \mathfrak{B}(J_{10}),$$

$$G(\alpha) = G(\beta, k(G(\gamma)) \quad \text{for } \alpha \in \mathfrak{B}(J_{11});$$

if $\alpha \geq \omega_{\lambda+\nu+1}$,

$$G(\alpha) = G(\beta, 0) = 0 \quad \text{for } \alpha \in \mathfrak{B}(J_9),$$

$$G(\alpha) = G(\beta, h.G''\omega_{\lambda+\nu+1}) \quad \text{for } \alpha \in \mathfrak{B}(J_{10}),$$

$$G(\alpha) = G(\beta, k.G''\omega_{\lambda+\nu+1}) \quad \text{for } \alpha \in \mathfrak{B}(J_{11})$$

with $\beta = K_1(\alpha)$, $\gamma = K_2(\alpha)$.

On the analogy of the definition of L we define M as the class of the values of the function G : $M = \mathfrak{B}(G)$. Then M satisfies the requirements of Theorem 1.

The fact that the model determined by M satisfies the axioms of Σ follows from the Lemma without difficulties.

The truth of the axiom of choice in the model follows from the fact that the function G inducing the well-ordering of the class M can be proved to be an M -class after we have verified that h, k are M -sets. However, to prove this analogously to the proof of the theorem that $V = L$ holds in $\mathcal{A}$, absoluteness proofs are needed. But it has no sense to speak of the absoluteness of G , for the functions h, k are not particular classes. Therefore we have to define operations $\mathfrak{G}(u_1, u_2, \xi)$, $\mathfrak{M}(u_1, u_2, \xi)$ writing in the definition of G the variables u_1, u_2, ξ instead of $h, k, \omega_{\lambda \dot{+} r \dot{+} 1}$, respectively.

In 4.1 we are going to define the particular classes S, J, K_1, K_2, J_i and we prove some results concerning these classes. In 4.2 we shall prove some lemmas needed to the construction and to the examination of the above mentioned operations. In 4.3 we are going to define the operations $\mathfrak{G}(u_1, u_2, \xi)$, $\mathfrak{M}(u_1, u_2, \xi)$ and other operations analogous to GÖDEL's particular classes Od, As, C , and we shall prove in this section that the class $\mathfrak{M}(u_1, u_2, \xi)$ satisfies the assumptions of the Lemma, and therefore in the model $\mathcal{J}_{\mathfrak{M}(u_1, u_2, \xi)}$ all the axioms of Σ hold for every u_1, u_2, ξ . In 4.4 we shall prove that all the operations defined in 4.3 are absolute with respect to $\mathcal{J}_M$ for every M satisfying the assumptions of the Lemma. In 4.5 we prove some general theorems for the classes $\mathfrak{M}(u_1, u_2, \xi)$. The functions h and k will be defined only in Section 4.6. We prove in this section that $h, k \in \mathfrak{M}(h, k, \omega_{\lambda \dot{+} r \dot{+} 1}) = M$, and therefore by the absoluteness of $\mathfrak{G}(u_1, u_2, \xi)$ $\mathfrak{G}_M(h, k, \omega_{\lambda \dot{+} r \dot{+} 1}) = \mathfrak{G}(h, k, \omega_{\lambda \dot{+} r \dot{+} 1})$ in consequence of which axiom E holds in the model $\mathcal{J}_M$. In 4.7 we prove the formula $(+)$ using the fact that k belongs to the model and we prove that $(2^{\aleph_M^{\lambda}})_M \cong \aleph_M^{\lambda \dot{+} r \dot{+} 1}$ using that h belongs to the model. In addition, in this section we prove that $V_M = \mathfrak{M}_M(h, k, \aleph_M^{\lambda \dot{+} r \dot{+} 1})$ holds, and therefore to prove Theorem 1 it is sufficient to prove the following theorem in Σ^* : If for a pair of ordinal numbers α, β $(\exists u_1)(\exists u_2)(V = \mathfrak{M}(u_1, u_2, \omega_{\alpha \dot{+} \beta \dot{+} 1}))$, then the following formulas are fulfilled:

$$(1) \quad 2^{\aleph_{\alpha \dot{+} \beta}} = \aleph_{\alpha \dot{+} \beta \dot{+} 1},$$

$$(2) \quad 2^{\aleph_\mu} = \aleph_{\mu \dot{+} 1} \quad \text{for every } \mu > \alpha \dot{+} \beta.$$

This theorem is proved in Sections 4.8—4.10 analogously to the theorem proved in [1], Chapter VIII, that $V = L$ implies the generalized continuum hypothesis. It is obvious that to carry out the proof a generalization

of the theorem [1], 12.6 is needed and this generalization is made possible by the fact that G^{α} is defined for $\alpha \cong \omega_{\lambda+1} \cdot r+1$ with the help of the fundamental operations and of the operations $x.0$, $x.h$, $x.k$ of very simple character. It is easy to find the generalization of [1], 12.6 from which (2) may be deduced. However, to find the generalization from which (1) may be deduced, too, a new idea is needed. In 4.8 we shall give a detailed sketch of the proofs elaborated in Sections 4.8—4.10.

If in the proof of a theorem the assumption $2^{\aleph_{\lambda+1}} \cong \aleph_{\lambda+1}$ is used, its number is marked by **.

4.1. As we have already mentioned we need a new definition of the particular classes S, J, J_i, K_1, K_2 defined in [1], 9.2, 9.21, 9.22, 9.24.

4.1.1. DEF.

$$(\mu < 12, r < 12 \supset (\langle u\alpha\beta \rangle S \langle r\gamma\delta \rangle \equiv \langle \alpha\beta \rangle R \langle \gamma\delta \rangle \quad \langle \alpha\beta \rangle = \langle \gamma\delta \rangle, \mu < r)). \\ S \subseteq 12 \times On^2$$

where R is the relation defined by [1], 7.81.

In the same manner as in [1], 9.2 it is easy to see that S exists, $12 \times On^2$ is well-ordered by S , $12 \times On^2$ is a proper class and any proper S -section of $12 \times On^2$ is a set. Hence $12 \times On^2$ is isomorphic to On with respect to S and E by [1], 7.7. Therefore there exists a function J satisfying the following defining postulate:

4.1.2. DEF.

$$J \text{ fin } 12 \times On^2, \mathfrak{B}(J) = On, (\mu < 12, r < 12 \supset (\langle u\alpha\beta \rangle S \langle r\gamma\delta \rangle) \supset \\ \supset (J' \langle u\alpha\beta \rangle < J' \langle r\gamma\delta \rangle)).$$

We define the functions $J_0, \dots, J_{11}$ as follows:

4.1.3. DEF.

$$J_0 \text{ fin } On^2, J_0' \langle \alpha\beta \rangle = J' \langle 0\alpha\beta \rangle, \\ \dots\dots\dots \\ J_{11} \text{ fin } On^2, J_{11}' \langle \alpha\beta \rangle = J' \langle 11\alpha\beta \rangle.$$

Analogously to [1], 9.23 we have

4.1.4. The classes $\mathfrak{B}(J_i)$ ($i=0, \dots, 11$) are mutually exclusive and their sum is On .

We define the classes K_1, K_2 :

4.1.5. DEF.

$$\langle \alpha\gamma \rangle \in K_1 \equiv (\exists \mu) (\exists \beta) (\mu < 12, \gamma = J' \langle \mu\alpha\beta \rangle), K_1 \subseteq On^2, \\ \langle \beta\gamma \rangle \in K_2 \equiv (\exists \mu) (\exists \alpha) (\mu < 12, \gamma = J' \langle \mu\alpha\beta \rangle), K_2 \subseteq On^2.$$

K_1, K_2 are functions defined on On . The following theorems may be proved literally as the theorems [1], 9.25, 9.26, 9.27:

$$4.1.6. \quad J_i' \langle \alpha \beta \rangle \geq \mathfrak{M} \alpha \beta \quad \text{for } i < 12,$$

$$J_i' \langle \alpha \beta \rangle > \mathfrak{M} \alpha \beta \quad \text{for } i < 12, i \neq 0.$$

$$K_1' \alpha \leq \alpha, \quad K_2' \alpha \leq \alpha,$$

$$K_1' \alpha < \alpha, \quad K_2' \alpha < \alpha \quad \text{for } \alpha \notin \mathfrak{B}(J_0).$$

$$4.1.7.* \quad \alpha < \omega_\gamma, \beta < \omega_\gamma \supset J_i' \langle \alpha \beta \rangle < \omega_\gamma, \quad \omega_\gamma \in \mathfrak{B}(J_0).$$

We need the following simple result:

$$4.1.8.* \quad \text{If } \beta < \omega_\alpha, \text{ then there exists a } \gamma < \omega_\alpha \text{ such that } \beta < \gamma \text{ and } \gamma \in \mathfrak{B}(J_0).$$

PROOF. $\beta = J' \langle i \alpha_1 \beta_1 \rangle$. Let $\langle \alpha_2 \beta_2 \rangle$ be the successor of $\langle \alpha_1 \beta_1 \rangle$ in the well-ordering R of On^2 . Let j be the integer for which $i+j=12$. Then $\gamma = \beta + j = J' \langle 0 \alpha_2 \beta_2 \rangle$ by 4.1.1 and 4.1.2 and $\beta < \gamma$ by 2.1.6. If $\beta < \omega_\alpha$, then $\beta < \omega_\alpha$, and therefore $\beta + 1 = \overline{\beta} + \overline{\{ \beta \}} < \omega_\alpha$ by [1], 8.63, hence $\beta + j < \omega_\alpha$ for every $j < 12$. So we have $\gamma < \omega_\alpha$, but then $\gamma < \omega_\alpha$ by [1], 8.28 and $\gamma \in \mathfrak{B}(J_0)$ by the definition of J_0 .

4.2.

ML₁. Are the operations $\mathfrak{H}_0(U_1, \dots, U_l), \mathfrak{H}_i(X, Y, U_1, \dots, U_l)$ ($i=1, \dots, 11$) normal, and if, in addition, $\mathfrak{M}(\mathfrak{H}_i(x, y, U_1, \dots, U_l))$ for every $x, y, U_1, \dots, U_l$ ($i=1, \dots, 11$), then there exists a normal operation $\mathfrak{H}(U_1, \dots, U_l, Z)$ such that $\mathfrak{H}(U_1, \dots, U_l, Z) = 0$ if Z is not an ordinal number, and for every $U_1, \dots, U_l, \xi$ $\mathfrak{H}(U_1, \dots, U_l, \xi)$ is equal to the class H satisfying the following formulas:

$$H \mathfrak{H} n \text{ On},$$

$$\alpha < \xi \supset H' \alpha = \mathfrak{H}_0(U_1, \dots, U_l)' \alpha,$$

$$(1) \quad \alpha \in \mathfrak{B}(J_0) - \xi \supset H' \alpha = H'' \alpha,$$

$$\alpha \in \mathfrak{B}(J_i) - \xi \supset H' \alpha = \mathfrak{H}_i(H' K_1' \alpha, H' K_2' \alpha, U_1, \dots, U_l) \quad \text{for } i=1, \dots, 11.$$

PROOF.²² In order to prove the existence of the operation $\mathfrak{H}$ first we define an operation $\mathfrak{A}(U_1, \dots, U_l, Z)$ as follows: $\mathfrak{A}(U_1, \dots, U_l, Z) = 0$ if Z is not an ordinal number and for every $U_1, \dots, U_l, \xi$ $\mathfrak{A}(U_1, \dots, U_l, \xi) = A$ is defined by the formulas

$$A \mathfrak{H} n V,$$

$$\mathfrak{D}(x) \in \xi \supset A' x = \mathfrak{H}_0(U_1, \dots, U_l)' \mathfrak{D}(x),$$

$$(2) \quad \mathfrak{D}(x) \in \mathfrak{B}(J_0) - \xi \supset A' x = \mathfrak{B}(x),$$

$$\mathfrak{D}(x) \in \mathfrak{B}(J_i) - \xi \supset A' x = \mathfrak{H}_i(x' K_1' \mathfrak{D}(x), x' K_2' \mathfrak{D}(x), U_1, \dots, U_l)$$

$$\text{for } i=1, \dots, 11,$$

and $A' x = 0$ everywhere else.

²² The proof is similar to the existence proof of F given in [1], 9.3.

The existence and unicity of A is assured by M_0 [1] for every $U_1, \dots, U_i, \xi$ taking into consideration that $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_i(x, y, U_1, \dots, U_i))$ and the concepts appearing in the formulas are normal by the assumptions. Thus the operation $\mathfrak{M}(U_1, \dots, U_i, Z)$ exists and it is easy to verify that it is normal. By M_0 there exists a normal operation $\mathfrak{S}^+(U_1, \dots, U_i, Z)$ such that $\mathfrak{S}^+(U_1, \dots, U_i, Z) = H$ satisfies

$$(3) \quad H \mathfrak{S}n On, \quad H^i a = A^i(H^i a)$$

where A satisfies (2). But if for $U_1, \dots, U_i, \xi$ H satisfies (3) and A satisfies (2), then H satisfies (1) as seen by the following proof. $H \mathfrak{S}n On$. If $a < \xi$, then $\mathfrak{S}(H^i a) = a < \xi$, and therefore $H^i a = \mathfrak{S}(U_1, \dots, U_i)^i a$. If $a \in \mathfrak{B}(J_0) - \xi$, then $\mathfrak{S}(H^i a) = a \in \mathfrak{B}(J) - \xi$ and $H^i a = \mathfrak{B}(H^i a) = H^{ii} a$. If $a \in \mathfrak{B}(J_i) - \xi$ ($i = 1, \dots, 11$), then $\mathfrak{S}(H^i a) = a \in \mathfrak{B}(J_i) - \xi$ and $H^i a = A^i(H^i a) = \mathfrak{S}((H^i a)^i K_1^i a, (H^i a)^i K_2^i a, U_1, \dots, U_i)$. But $K_1^i a, K_2^i a < a$ by 4.1.6 and $(H^i a)^i \beta = H^i \beta$ if $\beta < a$, therefore $H^i a = \mathfrak{S}(H^i K_1^i a, H^i K_2^i a, U_1, \dots, U_i)$.

Hence if we define the operation $\mathfrak{S}(U_1, \dots, U_i, Z)$ by the stipulations

$$\mathfrak{S}(Z) \supset \mathfrak{S}(U_1, \dots, U_i, Z) = \mathfrak{S}^+(U_1, \dots, U_i, Z),$$

$$\sim \mathfrak{S}(Z) \supset \mathfrak{S}(U_1, \dots, U_i, Z) = 0,$$

$\mathfrak{S}$ satisfies the requirements of ML_1 . By transfinite induction it is easy to see that there exists only one class H satisfying (1) for every $U_1, \dots, U_i, \xi$, and so the normal operation $\mathfrak{S}$ constructed above is defined by the stipulations given in ML_1 .

ML_2 . Are the operations $\mathfrak{S}_i(X, Y, U_1, \dots, U_i)$ ($i = 1, \dots, 11$) normal and if, in addition, $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_i(x, y, U_1, \dots, U_i))$ for every $x, y, U_1, \dots, U_i$, then there exists a normal operation $\mathfrak{S}(U_1, \dots, U_i, Z)$ such that $\mathfrak{S}(U_1, \dots, U_i, Z) = 0$ if Z is not an ordinal number and for every ordinal number ξ $\mathfrak{S}(U_1, \dots, U_i, \xi)$ is equal to the class H satisfying the following formulas:

$$H \mathfrak{S}n \xi,$$

$$(4) \quad a \in \mathfrak{B}(J_i), \xi \supset H^i a = H^{ii} a, \\ a \in \mathfrak{B}(J_i), \xi \supset H^i a = \mathfrak{S}(H^i K_1^i a, H^i K_2^i a, U_1, \dots, U_i) \quad \text{for } i = 1, \dots, 11.$$

PROOF. It follows from ML_1 that there exists a normal operation $\mathfrak{S}^+(U_1, \dots, U_i)$ such that $\mathfrak{S}^+(U_1, \dots, U_i) = H^+$ where the following formulas are satisfied by H^+ :

$$H^+ \mathfrak{S}n On,$$

$$(5) \quad a \in \mathfrak{B}(J_0) \supset H^{+i} a = H^{+ii} a, \\ a \in \mathfrak{B}(J_i) \supset H^{+i} a = \mathfrak{S}(H^{+i} K_1^i a, H^{+i} K_2^i a, U_1, \dots, U_i) \quad \text{for } i = 1, \dots, 11.$$

If H^+ satisfies (5), then $H = H^+ \upharpoonright \xi$ satisfies (4). This is to be seen as follows. $\mathfrak{D}(H^+ \upharpoonright \xi) = \xi$, and consequently the first of the formulas (4) is fulfilled. If $\alpha \in \xi$, then $H'\alpha = H''\alpha$. Suppose $\alpha \in \mathfrak{B}(J_0) \setminus \xi$. Then $H^+\alpha = H^{++}\alpha$, hence $H'\alpha = H''\alpha$. But by 2.2.2 $H^+\alpha$ and $H''\alpha$ are the sets of the elements $H^+\beta$ and $H''\beta$, respectively, where $\beta < \alpha$. If $\beta < \alpha$, then $\beta \in \xi$, and therefore $H^+\beta = H''\beta$, hence $H'\alpha = H''\alpha$. Now suppose $\alpha \in \mathfrak{B}(J_i) \setminus \xi$ ($i = 1, \dots, 11$). $H'\alpha = H''\alpha = \mathfrak{H}_i(H^+K_1'\alpha, H^+K_2'\alpha, U_1, \dots, U_i)$. $K_1'\alpha, K_2'\alpha < \alpha$ by 4.1.6, and therefore $K_1'\alpha, K_2'\alpha \in \xi$. Hence $H'\alpha = \mathfrak{H}_i(H'K_1'\alpha, H'K_2'\alpha, U_1, \dots, U_i)$. Let $\mathfrak{H}(U_1, \dots, U_i, Z)$ be the operation defined by the following stipulations:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(Z) \supset \mathfrak{H}(U_1, \dots, U_i, Z) &= \mathfrak{H}^+(U_1, \dots, U_i) \upharpoonright Z, \\ \sim \mathfrak{D}(Z) \supset \mathfrak{H}(U_1, \dots, U_i, Z) &= 0.\end{aligned}$$

It follows from the facts proved above that $\mathfrak{H}$ is normal and satisfies the definition (4). It is easy to see by transfinite induction that there exists only one class H satisfying the formulas (4) for every $U_1, \dots, U_i, \xi$. Hence under the conditions of ML_2 a normal operation is defined by the stipulations given in ML_2 .

ML_3 . Let $\mathfrak{H}_i(X, Y)$ ($i = 1, \dots, 11$) be operations of the form $\mathfrak{H}_1(X, Y) = \{X, Y\}$ and $\mathfrak{H}_i(X, Y) = X \mathfrak{M}_i(Y)$ for $i = 2, \dots, 11$ where $\mathfrak{M}_i(Y)$ are arbitrary operations.

Let ξ be an ordinal number and H_0 a class such that $H_0'\alpha \subseteq H_0''\alpha$ for every α less than ξ . Suppose that the following formulas are fulfilled by the class H :

$$\begin{aligned}(6) \quad & (\exists A) (H \mathfrak{H} A \supset \mathfrak{D} \text{rd}(A)), \\ & \alpha \in \xi \cdot A \supset H'\alpha = H_0'\alpha, \\ & \alpha \in (\mathfrak{B}(J_0) \setminus \xi) \cdot A \supset H'\alpha = H''\alpha, \\ & \alpha \in (\mathfrak{B}(J_i) \setminus \xi) \cdot A \supset \mathfrak{H}_i(H'K_1'\alpha, H'K_2'\alpha) \quad \text{for } i = 1, \dots, 11.\end{aligned}$$

Then $H'\alpha \subseteq H''\alpha$ and $H''\alpha$ is complete for every $\alpha \in A$.

PROOF.²¹ Let A be the class for which $H \mathfrak{H} A$. Let α be the first element of A for which $H'\alpha \subseteq H''\alpha$ is false. Then we have $H'\beta \subseteq H''\beta$ for every $\beta < \alpha$ (A is either an ordinal number or On thus $\alpha \in A$ implies $\beta \in A$ for every $\beta < \alpha$). If $\alpha < \xi$, then $H'\alpha = H_0'\alpha$ and $H'\beta = H_0'\beta$ for every $\beta < \alpha$, i.e. $H''\alpha = H_0''\alpha$, hence $H'\alpha \subseteq H''\alpha$ by the assumption. If $\alpha \in \mathfrak{B}(J_0) \setminus \xi$, then $H'\alpha = H''\alpha$, hence $H'\alpha \subseteq H''\alpha$. If $\alpha \in \mathfrak{B}(J_i) \setminus \xi$, then $H'\alpha = \mathfrak{H}_i(H'K_1'\alpha, H'K_2'\alpha) = \{H'K_1'\alpha, H'K_2'\alpha\}$. $K_1'\alpha, K_2'\alpha < \alpha$ by 4.1.6, and therefore $\{H'K_1'\alpha, H'K_2'\alpha\} \subseteq H''\alpha$ by 2.2.2. If $\alpha \in \mathfrak{B}(J_i) \setminus \xi$ ($i = 2, \dots, 11$)

²¹ Similarly to [1], 9.5.

then $H'\alpha = \mathfrak{H}_i(H'K_1'\alpha, H'K_2'\alpha) = H'(K_1'\alpha, \mathfrak{H}_i(H'K_2'\alpha))$. Put $K_1'\alpha = \beta$. $H'\alpha \subseteq H'\beta$, and since by 4.1.6 $\beta < \alpha$, $H'\beta \subseteq H''\beta$ and $H''\beta \subseteq H''\alpha$. Hence $H'\alpha \subseteq H''\alpha$. But this is a contradiction, therefore we have $H'\alpha \subseteq H''\alpha$ for every $\alpha \in A$. The completeness of $H''\alpha$ is a corollary of the statement just proved. In fact, if $u \in H''\alpha$, then $u = H'\beta$ for a certain $\beta < \alpha$, but then $H'\beta \subseteq H''\beta \subseteq H''\alpha$, hence $u \subseteq H''\alpha$.

4.3. In this section we define the operations $\mathfrak{G}(U_1, U_2, \xi)$, $\mathfrak{M}(U_1, U_2, \xi)$ etc. already mentioned. We make the following convention: Let $\mathfrak{A}(\dots, Z) = 0$ for the classes Z not being ordinal numbers, for any operation $\mathfrak{A}(\dots, Z)$ defined in this section.

First we define the operations $\mathfrak{g}_i(X, Y, U_1, U_2, Z)$ ($i = 1, \dots, 11$) as follows:

4.3.1. DEF.

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_i(X, Z, U_1, U_2, \xi) &= \mathfrak{F}_i(X, Y) \quad \text{for } i = 1, \dots, 8, \\ \mathfrak{g}_9(X, Y, U_1, U_2, \xi) &= X.On, \\ \mathfrak{g}_{10}(X, Y, U_1, U_2, \xi) &= X.U_1'Y, \\ \mathfrak{g}_{11}(X, Y, U_1, U_2, \xi) &= X.U_2'Y.\end{aligned}$$

Now we define the operation $\mathfrak{g}(U_1, U_2, Z)$ in the following way:

4.3.2. DEF. Let for every U_1, U_2, ξ $\mathfrak{g}(U_1, U_2, \xi)$ be equal to the uniquely determined set g satisfying the following formulas:

$$\begin{aligned}g &\mathfrak{F}n\xi, \\ \alpha \in \mathfrak{B}(J_0). \xi \supset g'\alpha &= g''\alpha, \\ \alpha \in \mathfrak{B}(J_i). \xi \supset g'\alpha &= \mathfrak{g}_i(g'K_1'\alpha, g'K_2'\alpha, U_1, U_2, \xi) \quad \text{for } i = 1, \dots, 11.\end{aligned}$$

We have to prove the existence and the normality of $\mathfrak{g}(U_1, U_2, Z)$.

The operations $\mathfrak{g}_i(X, Y, U_1, U_2, Z)$ ($i = 1, \dots, 11$) being normal and $\mathfrak{g}_i(x, y, U_1, U_2, Z)$ being a set for every x, y, U_1, U_2, Z by [1], 9.1 and 4.3.1, it follows from ML_2 the existence of a normal operation $\mathfrak{g}^+(U_1, U_2, Z, Z_1) = g^+$ satisfying the following formulas:

$$\begin{aligned}g^+ &\mathfrak{F}n\xi, \\ \alpha \in \mathfrak{B}(J_0). \xi \supset g^{+'}\alpha &= g^{+''}\alpha, \\ \alpha \in \mathfrak{B}(I_i). \xi \supset g^{+'}\alpha &= \mathfrak{g}_i(g^{+'}K_1'\alpha, g^{+'}K_2'\alpha, U_1, U_2, Z) \quad \text{for } i = 1, \dots, 11.\end{aligned}$$

Consequently, the operation $\mathfrak{g}(U_1, U_2, Z) = \mathfrak{g}^+(U_1, U_2, Z, Z)$ is normal and satisfies the requirements of 4.3.2.

The operations $\mathfrak{G}_i(X, Y, U_1, U_2, Z)$ are defined as follows:

4.3.3. DEF.

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_i(X, Y, U_1, U_2, \xi) &= \tilde{\delta}_i(X, Y) \quad \text{for } i = 1, \dots, 8, \\ \mathfrak{G}_9(X, Y, U_1, U_2, \xi) &= X.0 = 0, \\ \mathfrak{G}_{10}(X, Y, U_1, U_2, \xi) &= X.U_1.\mathfrak{B}(\mathfrak{g}(U_1, U_2, \xi)), \\ \mathfrak{G}_{11}(X, Y, U_1, U_2, \xi) &= X.U_2.\mathfrak{B}(\mathfrak{g}(U_1, U_2, \xi)).\end{aligned}$$

Now we define the operation $\mathfrak{G}(U_1, U_2, Z)$.

4.3.4. DEF. For every U_1, U_2, ξ let $\mathfrak{G}(U_1, U_2, \xi)$ be equal to the class G determined by the formulas:

$$\begin{aligned}G &\tilde{\delta}n On, \\ \alpha < \xi \supset G^i \alpha &= \mathfrak{g}(U_1, U_2, \xi)^i \alpha, \\ \alpha \in \mathfrak{B}(J_0) - \xi &\supset G^i \alpha = G^i \alpha, \\ \alpha \in \mathfrak{B}(J_i) - \xi &\supset G^i \alpha = \mathfrak{G}_i(G^i K_1^i \alpha, G^i K_2^i \alpha, U_1, U_2, \xi) \quad \text{for } i = 1, \dots, 11.\end{aligned}$$

The operations $\mathfrak{G}_i(X, Y, U_1, U_2, Z)$, $\mathfrak{g}(U_1, U_2, Z)$ being normal and $\mathfrak{G}_i(x, y, U_1, U_2, Z)$ being a set for every x, y, U_1, U_2, Z ($i = 1, \dots, 11$) by [1], 9.4 and 4.3.3, there exists by ML₁ a normal operation $\mathfrak{G}^+(U_1, U_2, Z, Z) = G^+$ such that for every U_1, U_2, Z, ξ

$$\begin{aligned}G^+ &\tilde{\delta}n On, \\ \alpha < \xi \supset G^+ \alpha &= \mathfrak{g}(U_1, U_2, Z)^i \alpha \\ \alpha \in \mathfrak{B}(J_0) - \xi &\supset G^+ \alpha = G^+ \alpha, \\ \alpha \in \mathfrak{B}(J_i) - \xi &\supset G^+ \alpha = \mathfrak{G}_i(G^+ K_1^i \alpha, G^+ K_2^i \alpha, U_1, U_2, Z).\end{aligned}$$

It results that the operation $\mathfrak{G}(U_1, U_2, Z) = \mathfrak{G}^+(U_1, U_2, Z, Z)$ is normal and satisfies the requirements of 4.3.4.

The operation $\mathfrak{M}(U_1, U_2, Z)$ is defined as follows:

4.3.5. DEF. $\mathfrak{M}(U_1, U_2, \xi) = \mathfrak{B}(\mathfrak{G}(U_1, U_2, \xi))$.

The classes $\mathfrak{M}(U_1, U_2, \xi)$ are constructed analogously to GÖDEL's L . Analogously to the "order of a constructible set" the U_1, U_2, ξ -order of a set $x \in \mathfrak{M}(U_1, U_2, \xi)$ is defined as follows: the smallest α for which $x = \mathfrak{G}(U_1, U_2, \xi)^i \alpha$ is called the U_1, U_2, ξ -order of the set $x \in \mathfrak{M}(U_1, U_2, \xi)$. We define the operation $\mathfrak{O}d(U_1, U_2, Z)$ in such a way that for every U_1, U_2, ξ the function $\mathfrak{O}d(U_1, U_2, \xi)$ associates the U_1, U_2, ξ -order of x to each element x of $\mathfrak{M}(U_1, U_2, \xi)$.

4.3.6. DEF.

$$\begin{aligned}\langle yx \rangle \in \mathfrak{O}d(U_1, U_2, \xi) &\equiv \langle xy \rangle \in \mathfrak{G}(U_1, U_2, \xi). \\ .(z)(z \in y \supset \sim \langle xz \rangle \in \mathfrak{G}(U_1, U_2, \xi)) &). \mathfrak{M}el(\mathfrak{O}d(U_1, U_2, \xi)).\end{aligned}$$

For every U_1, U_2, ξ there exists by M_4 [1] exactly one class $Y = \mathfrak{Dd}(U_1, U_2, \xi)$ satisfying this formula, the concepts occurring on the right-hand side of the equivalence being normal. Thus the operation $\mathfrak{Dd}(U_1, U_2, Z)$ exists.

It follows immediately from the definitions that

$$4.3.7. \quad \mathfrak{Dd} \mathfrak{F}n \mathfrak{M}; \quad x \in \mathfrak{M}. \alpha = \mathfrak{Dd}' x \supset \mathfrak{G}' \alpha = x.^{24}$$

$$4.3.8. \quad \alpha < \xi \supset \mathfrak{Comp}(\mathfrak{g}'' \alpha). \mathfrak{g}' \alpha \subseteq \mathfrak{g}'' \alpha.$$

PROOF. 4.3.8 follows from ML_1 . In fact, if we put $\mathfrak{N}_0 = 0$, $\xi = 0$, $A = \xi$, $\mathfrak{N}_i(X, Y) = \mathfrak{g}_i(X, Y, U_1, U_2, \xi)$ ($i = 1, \dots, 11$) in ML_1 , then the class H defined by the formulas (6) is $\mathfrak{g}$ and the assumptions of ML_3 are fulfilled by [1], 9.1 and 4.3.1.

$$4.3.9. \quad \mathfrak{G}' \alpha \subseteq \mathfrak{G}'' \alpha; \quad \mathfrak{Comp}(\mathfrak{G}'' \alpha).$$

PROOF. Put

$\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{g}(U_1, U_2, \xi)$, $\xi = \xi$, $A = On$, $\mathfrak{N}_i(X, Y) = \mathfrak{G}_i(X, Y, U_1, U_2, \xi)$ ($i = 1, \dots, 11$) in ML_3 . Then the class H defined by the formulas (6) is $\mathfrak{G}(U_1, U_2, \xi)$ for every U_1, U_2, ξ . By [1], 9.1, 4.3.3 and 4.3.8 the assumptions of ML_3 are fulfilled. Consequently 4.3.9 follows from ML_3 .

$$4.3.10. \quad y \in \mathfrak{M}. x \in y \supset x \in \mathfrak{M}. \mathfrak{Dd}' x < \mathfrak{Dd}' y.$$

PROOF. If $y \in \mathfrak{M}$, then by 4.3.7 there is an α such that $\alpha = \mathfrak{Dd}' y$ and $\mathfrak{G}' \alpha = y$. But $\mathfrak{G}' \alpha \subseteq \mathfrak{G}'' \alpha$ by 4.3.9 and x being an element of y we have $x \in \mathfrak{G}'' \alpha$. Then $x = \mathfrak{G}' \beta$ for a β ($\beta < \alpha$) thus $x \in \mathfrak{M}$ and $\mathfrak{Dd}' x < \mathfrak{Dd}' y$.

As a corollary of 4.3.10 we have

$$4.3.11. \quad \mathfrak{Comp}(\mathfrak{M}).^{25}$$

On the analogy of the particular class As defined in [1], 11.8 an operation $\mathfrak{Ns}(U_1, U_2, Z)$ will be defined. The function $\mathfrak{Ns}$ associates to every non-empty set x ($x \in \mathfrak{M}$) the element y of the least order of x .

4.3.12. DEF.

$$(\langle yx \rangle \in \mathfrak{Ns}(U_1, U_2, \xi) \equiv y \in x. x \in \mathfrak{M}(U_1, U_2, \xi). \\ .(z)(\mathfrak{Dd}(U_1, U_2, \xi)' z < \mathfrak{Dd}(U_1, U_2, \xi)' y \supset \sim (z \in x))). \mathfrak{Ncl}(\mathfrak{Ns}(U_1, U_2, \xi)).$$

The existence of the operation $\mathfrak{Ns}$ similarly as in the case of the operation $\mathfrak{Dd}$ is assured by M_4 [1].

$$4.3.13. \quad \mathfrak{Ns} \mathfrak{F}n(\mathfrak{M} - \{0\}); \quad \mathfrak{Ns}' x \in x \text{ if } x \in \mathfrak{M} \text{ and } x \neq 0.$$

²⁴ Here and often in the sequel the parameters U_1, U_2, ξ are omitted. If the sign of such an operation appears in a theorem without the parameters, then the theorem is true for every U_1, U_2, ξ .

²⁵ Similarly to [1], 9.51.

PROOF. If $\langle yx \rangle$ and $\langle zx \rangle$ are elements of $\mathfrak{A}_s$, then $y \in x$ and $\mathfrak{D}^b y = \dots \mathfrak{D}^b z$ by the definition 4.3.12, hence $y = z$ by 4.3.7. It follows that $\mathfrak{A}_s$ is a function. $(\exists y)(\langle yx \rangle \in \mathfrak{A}_s)$ implies that $x \in \mathfrak{M}$ and $y \in x$, hence $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}_s) \subset \mathfrak{M} - \{0\}$. On the other hand, if $x \in \mathfrak{M} - \{0\}$, then x being a non-empty subset of $\mathfrak{M}$ the set $\mathfrak{D}^b x$ is non-empty by 4.3.7. $\mathfrak{D}^b x$ is a set of ordinal numbers. Let α be the smallest element of it, and let y be the element of order α . Then $\langle yx \rangle \in \mathfrak{A}_s$, hence $x \in \mathfrak{D}(\mathfrak{A}_s)$. It follows that $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}_s) = \mathfrak{M} - \{0\}$. The second part of 4.3.13 is a corollary of the statement just proved, for if $x \in \mathfrak{M}$ and $x \neq 0$, then $x \in \mathfrak{D}(\mathfrak{A}_s)$, hence $\langle \mathfrak{A}_s^b x x \rangle \in \mathfrak{A}_s$, and therefore $\mathfrak{A}_s^b x \in x$.

4.3.14.

$$\alpha \in \mathfrak{B}(J_0) \supset \mathfrak{G}^i \alpha = \mathfrak{G}^{ii} \alpha.$$

$$\alpha \in \mathfrak{B}(J_i) \supset \mathfrak{G}^i \alpha = \mathfrak{F}_i(\mathfrak{G}^i \beta, \mathfrak{G}^i \gamma) \quad \text{for } i = 1, \dots, 8$$

where $\beta = K_1^i \alpha$, $\gamma = K_2^i \alpha$, $\alpha = J_i^i \langle \beta \gamma \rangle$.

PROOF. For $\alpha \geq \xi$ the statement follows directly from the definitions 4.3.3, 4.3.4 of the operations $\mathfrak{G}_i$ and $\mathfrak{G}$.

If $\alpha < \xi$, then $\mathfrak{G}^i \alpha = g^i \alpha$ by 4.3.4 and $\beta, \gamma \leq \alpha < \xi$ by 4.1.6, hence $\mathfrak{G}^i \alpha = g^i \alpha = g_i(g^i \beta, g^i \gamma) = \mathfrak{F}_i(\mathfrak{G}^i \beta, \mathfrak{G}^i \alpha)$ for $i = 1, \dots, 8$ by 4.3.1 and 4.3.2. $\mathfrak{G}^i \beta = g^i \beta$ for every $\beta < \alpha$, hence if $\alpha \in \mathfrak{B}(J_0)$, then $\mathfrak{G}^i \alpha = g^i \alpha = g^{ii} \alpha = \mathfrak{G}^{ii} \alpha$ by 4.3.2.

4.3.15. $\mathfrak{Fcl}(\mathfrak{M})$, i. e. $\mathfrak{M}$ is closed with respect to the fundamental operations.²⁶

PROOF. Suppose $x \in \mathfrak{M}$, $y \in \mathfrak{M}$. Put $\mathfrak{D}^b x = \beta$, $\mathfrak{D}^b y = \gamma$. $\mathfrak{G}^i \beta = x$, $\mathfrak{G}^i \gamma = y$ by 4.3.7. $\mathfrak{G}^i J_i^i \langle \beta \gamma \rangle = \mathfrak{F}_i(x, y)$ for $i = 1, \dots, 8$ by 4.3.14, hence $\mathfrak{F}_i(x, y) \in \mathfrak{M}$ for $i = 1, \dots, 8$.

4.3.16. $\mathfrak{Mu}(\mathfrak{M})$, i. e. $\mathfrak{M}$ is almost universal.²⁷

PROOF. Suppose $x \subseteq \mathfrak{M}$. $\mathfrak{D}^b x$ is a set, $\mathfrak{D}^b$ being a function by 4.3.7. $\mathfrak{D}^b x$ is a set of ordinal numbers. Therefore by [1], 7.451 there exists an ordinal number α such that every element β of $\mathfrak{D}^b x$ is less than α and we may suppose $\alpha \in \mathfrak{B}(J_0)$. $x \subseteq \mathfrak{G}^{ii} \mathfrak{D}^b x$ by 4.3.7, and — $\mathfrak{D}^b x$ being a subset of α — $\mathfrak{G}^{ii} \mathfrak{D}^b x \subset \mathfrak{G}^{ii} \alpha$, hence $x \subseteq \mathfrak{G}^{ii} \alpha = \mathfrak{G}^i \alpha$. Consequently x is a subset of an element of $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ is almost universal.

4.3.17.* $\psi_\iota(\mathfrak{M}(U_1, U_2, \xi))$. The model determined by the class $\mathfrak{M}$ satisfies the axiom system Σ for every U_1, U_2, ξ .

²⁶ Similarly to [1], 9.6.

²⁷ Similarly to [1], 9.63.

PROOF. $\mathfrak{M}$ is complete, closed with respect to the fundamental operations, and almost universal by 4.3.11, 4.3.15, 4.3.16. Consequently $\psi_0(\mathfrak{M})$ holds by the Lemma 3.3.

On the analogy of the particular class C defined in [1], 11.81 an operation $\mathfrak{C}(U_1, U_2, Z)$ will be defined. For every U_1, U_2, ξ the function $\mathfrak{C}(U_1, U_2, \xi)$ associates to every ordinal number α the smallest ordinal number β , which is the order of an element of $\mathfrak{G}'\alpha$, whenever the set $\mathfrak{G}'\alpha$ is non-empty.

4.3.18. DEF.

$$\mathfrak{C}(U_1, U_2, \xi) \mathfrak{F} n \text{ On.}$$

$$\mathfrak{C}(U_1, U_2, \xi)' \alpha = \mathfrak{D} \mathfrak{b}(U_1, U_2, \xi)' \mathfrak{N} \mathfrak{s}(U_1, U_2, \xi)' \mathfrak{G}(U_1, U_2, \xi)' \alpha.$$

$\mathfrak{D} \mathfrak{b}' \mathfrak{N} \mathfrak{s}' \mathfrak{G}' x$ is a normal term, the operations $\mathfrak{D} \mathfrak{b}, \mathfrak{N} \mathfrak{s}, \mathfrak{G}$ being normal, and $\mathfrak{M}(\mathfrak{D} \mathfrak{b}' \mathfrak{N} \mathfrak{s}' \mathfrak{G}' x)$ for every x by the definition of the operation $\mathfrak{C}$. Therefore, by M_5 [1] for every U_1, U_2, ξ there exists exactly one class $\mathfrak{C}$ satisfying this definition. Hence the operation $\mathfrak{C}(U_1, U_2, Z)$ exists.

4.3.19. $\mathfrak{G}' \mathfrak{C}' \alpha \in \mathfrak{G}' \alpha$ if $\mathfrak{G}' \alpha$ is non-empty.

PROOF. It follows by 4.3.13 from the assumption that $\mathfrak{N} \mathfrak{s}' \mathfrak{G}' \alpha \in \mathfrak{G}' \alpha$, and therefore $\mathfrak{N} \mathfrak{s}' \mathfrak{G}' \alpha \in \mathfrak{M}$ by 4.3.10. Put $x = \mathfrak{N} \mathfrak{s}' \mathfrak{G}' \alpha$ and $\mathfrak{D} \mathfrak{b}' x = \beta$. $x = \mathfrak{G}' \beta$ by 4.3.7, and therefore, β being equal to $\mathfrak{C}' \alpha$, we have $x = \mathfrak{G}' \mathfrak{C}' \alpha = \mathfrak{N} \mathfrak{s}' \mathfrak{G}' \alpha$, hence $\mathfrak{G}' \mathfrak{C}' \alpha \in \mathfrak{G}' \alpha$.

4.3.20. $\mathfrak{C}' \alpha \leq \alpha$, and if $\alpha \neq 0$, $\mathfrak{C}' \alpha < \alpha$.

PROOF. If $\mathfrak{G}' \alpha$ is non-empty, then $\mathfrak{C}' \alpha$ is the order of one of its elements, hence $\mathfrak{C}' \alpha \leq \mathfrak{D} \mathfrak{b}' \mathfrak{G}' \alpha \leq \alpha$ by 4.3.10. If $\mathfrak{G}' \alpha$ is empty, then $\mathfrak{G}' \alpha \notin \mathfrak{D}(\mathfrak{N} \mathfrak{s})$ by 4.3.13 and thus $\mathfrak{N} \mathfrak{s}' \mathfrak{G}' \alpha = 0$. Consequently, in this case $\mathfrak{C}' \alpha = \mathfrak{D} \mathfrak{b}' 0 = 0$. Hence $\mathfrak{C}' \alpha \leq \alpha$ and $\mathfrak{C}' \alpha = \alpha$ holds if and only if $\alpha = 0$.

4.4. In this section we are going to prove that all the operations defined in Section 4.3 are absolute with respect to any model $\mathcal{A}_M$, provided that M is complete, almost universal and $\psi_0(M)$ fulfilled.

In this section a concept is briefly called absolute if it is absolute with respect to any model determined by a complete and almost universal class M satisfying $\psi_0(M)$. M always denotes a complete and almost universal class for which $\psi_0(M)$.

4.4.1. $\mathfrak{M}(X)$ is absolute.

PROOF. $\mathfrak{M}_M(X) \equiv X \in M$. We have to prove $\mathfrak{M}_M(\bar{X}) \equiv \mathfrak{M}(\bar{X})$. If $\mathfrak{M}_M(\bar{X})$, then $\bar{X} \in M$, hence $\bar{X}$ is a set. Suppose, on the other hand, that $\bar{X}$ is a set. Since $\bar{X} \subseteq M$ by 2.2.1 and M is almost universal, there exists a $\bar{v}$ such that

$\bar{X} \subset \bar{r}$ and $\bar{r} \in M$. Thus $X.\bar{r} = \bar{X}$ and $\bar{X}.\bar{r} \in M$ by 2.2.1. Hence $\bar{X} \in \mathfrak{M}$, i. e. $\mathfrak{M}_M(X)$.

The assumption that M is almost universal is used only in this proof. Without referring occasionally we shall make use of the fact that by the assumptions and by 4.4.1 all the concepts listed in 2.5 and 2.7 are absolute.

All the concepts in question are defined with the help of the axioms of Σ , and therefore the relativized of the concepts exist. Therefore in the case of the particular classes by AB, it is enough to prove the absoluteness of the defining postulates, and if $\mathfrak{A}(\dots Z)$ is any of the operations defined in 4.3 and $\varphi(\dots, \xi)$ is the defining postulate of $\mathfrak{A}$ for $\dots \xi$, then the range $\mathfrak{D}(X)$ of the variable ξ being absolute, it is enough to prove by AB, the equivalence

$$\varphi(\dots \bar{U}_1, \bar{U}_2, \xi) \equiv \varphi_M(\dots \bar{U}_1, \bar{U}_2, \xi) \quad \text{for every } \dots \bar{U}_1, \bar{U}_2, \xi.$$

4.4.2. The particular classes Le, R, S, J, J_i ($i = 1, \dots, 11$), K_1, K_2 are absolute.

4.4.2 may be proved showing step by step that the concepts appearing in the defining postulates are absolute. Although we have changed the definition of GÖDEL's S, J, J_i, K_1, K_2 , the proofs are literally the same as in [1], 11.5, ..., 11.54, and so they may be omitted.

4.4.3. The operations $\mathfrak{A}_i(X, Y, U_1, U_2, Z)$ ($i = 1, \dots, 11$) are absolute.

PROOF. By the remark made above it is enough to see that the operations $\mathfrak{A}_i(X, Y)$ ($i = 1, \dots, 8$), $U_1^i Y, U_2^i Y$ and the particular class On are absolute.

4.4.4. The operation $\mathfrak{g}(U_1, U_2, Z)$ is absolute.

PROOF. Similarly as in 4.4.3 it is enough to see that the notions $X \in Y$, $X \mathfrak{A} Y$, the operations $\mathfrak{B}(X)$, $X.Y$, $X^i Y$ and the bounded variable α are absolute and the same is true for the particular classes J_i, K_1, K_2 and for the operations $\mathfrak{g}_i(X, Y, U_1, U_2, Z)$ by 4.4.2 and 4.4.3.

4.4.5. The operations $\mathfrak{G}_i(X, Y, U_1, U_2, Z)$ ($i = 1, \dots, 11$) are absolute.

PROOF. The operations $\mathfrak{A}_i(X, Y)$ ($i = 1, \dots, 8$), $\mathfrak{B}(X)$ and the particular class O are absolute and the same is true for the operation $\mathfrak{g}(U_1, U_2, Z)$ by 4.4.4.

4.4.6. The operation $\mathfrak{G}(U_1, U_2, Z)$ is absolute.

PROOF. The notions $X \in Y$, $X < Y$, $X \mathfrak{A} Y$, the operations $\mathfrak{B}(X)$, $X.Y$, $X^i Y$, $X^{\alpha} Y$, the particular class On , the variable α are absolute and the same is true for the particular classes J_i, K_1, K_2 and for the operations $\mathfrak{G}_i(X, Y, U_1, U_2, Z)$ and $\mathfrak{g}(U_1, U_2, Z)$ by 4.4.2, 4.4.4 and 4.4.5.

4.4.7. The operation $\mathfrak{M}(U_1, U_2, Z)$ is absolute.

PROOF. $\mathfrak{B}(X)$ and $\mathfrak{G}(U_1, U_2, Z)$ are absolute by 4.4.6.

4.4.8. The operation $\mathfrak{D}\mathfrak{b}(U_1, U_2, Z)$ is absolute.

PROOF. $\mathfrak{D}\mathfrak{b}(U_1, U_2, \xi) = T$ is defined by the following formula:

$$(1) \quad (\langle yx \rangle \in T \equiv \langle xy \rangle \in \mathfrak{G}(U_1, U_2, \xi). (z)(z \in y \supset \sim \langle xz \rangle \in \mathfrak{G}(U_1, U_2, \xi))). \mathfrak{Rel}(T).$$

Let us consider the following formulas

$$(2) \quad (\langle yx \rangle \in \bar{T} \equiv \langle xy \rangle \in \mathfrak{G}(\bar{U}_1, \bar{U}_2, \xi). (z)(z \in y \supset \sim \langle xz \rangle \in \mathfrak{G}(\bar{U}_1, \bar{U}_2, \xi))). \mathfrak{Rel}(\bar{T}),$$

$$(3) \quad (\langle \bar{y}\bar{x} \rangle \in \bar{T} \equiv \langle \bar{x}\bar{y} \rangle \in \mathfrak{G}(U_1, U_2, \xi). (\bar{z})(\bar{z} \in \bar{y} \supset \sim \langle \bar{x}\bar{z} \rangle \in \mathfrak{G}(\bar{U}_1, \bar{U}_2, \xi))). \mathfrak{Rel}(\bar{T}).$$

$X \in Y$, $\mathfrak{Rel}(X)$, the operations $\langle XY \rangle$, $\mathfrak{G}(U_1 U_2, Z)$ being absolute (the last one by 4.4.6), (3) is just the relativized of (1). Therefore it is enough to prove that for every $U_1, \bar{U}_2, \xi$ (2) holds if and only if (3) holds.

$\mathfrak{G}(\bar{U}_1, U_2, \xi)$ is an M -class for every $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \xi$ by AB_2 . Hence if any side of the equivalence in (2) is true, either $\langle yx \rangle$ or $\langle xy \rangle$ is an M -set. But in both cases we have, by the completeness of M , that $x \in M$ and $y \in M$. Hence (2) holds if and only if the following formula holds:

$$(\langle \bar{y}\bar{x} \rangle \in \bar{T} \equiv \langle \bar{x}\bar{y} \rangle \in \mathfrak{G}(\bar{U}_1, \bar{U}_2, \xi). (z)(z \in \bar{y} \supset \sim \langle \bar{x}z \rangle \in \mathfrak{G}(\bar{U}_1, \bar{U}_2, \xi))). \mathfrak{Rel}(\bar{T}).$$

Therefore it is sufficient to prove the following formula:

$$(z)(z \in \bar{y} \supset \sim \langle \bar{x}z \rangle \in \mathfrak{G}(U_1, \bar{U}_2, \xi)) \equiv (\bar{z})(\bar{z} \in \bar{y} \supset \sim \langle \bar{x}\bar{z} \rangle \in \mathfrak{G}(\bar{U}_1, \bar{U}_2, \xi)).$$

It is obvious that the left-hand side implies the right-hand side. The reverse implication is true too, because if z is not an M -set, $z \in \bar{y}$ is false and the implications hold vacuously.

4.4.9. The operation $\mathfrak{A}\mathfrak{s}(U_1, U_2, Z)$ is absolute.

4.4.9 is to be proved by a quite similar discussion as 4.4.8 using the absoluteness of $\mathfrak{D}\mathfrak{b}$ just proved, and so we may omit the proof.

4.5. In this section we prove some results concerning the classes $\mathfrak{M}(U_1, U_2, \xi)$. The variables $\bar{x}, \bar{y}, \dots$ run over $\mathfrak{M}$ -sets, i. e. their range is $\mathfrak{M}(U_1, U_2, \xi)$. There is no danger of misunderstanding, for in all the theorems announced in this section U_1, U_2, ξ are arbitrary but fixed values of the parameters.

4.5.1.* $\mathfrak{D}\mathfrak{b}'\mathfrak{F}_i(\bar{x}, \bar{y}) < \omega_\alpha$ if $\mathfrak{D}\mathfrak{b}'\bar{x} < \omega_\alpha$ and $\mathfrak{D}\mathfrak{b}'\bar{y} < \omega_\alpha$ ($i = 1, \dots, 8$).

PROOF. Put $\beta = \mathfrak{D}\mathfrak{b}'\bar{x}$, $\gamma = \mathfrak{D}\mathfrak{b}'\bar{y}$. Then $\bar{x} = \mathfrak{G}'\beta$ and $\bar{y} = \mathfrak{G}'\gamma$ by 4.3.7. $\mathfrak{G}'J_i'\langle \beta\gamma \rangle = \mathfrak{F}_i(\bar{x}, \bar{y})$ by 4.3.14, therefore $\mathfrak{D}\mathfrak{b}'\mathfrak{F}_i(\bar{x}, \bar{y}) \equiv J_i'\langle \beta\gamma \rangle$. But $\beta < \omega_\alpha$ and $\gamma < \omega_\alpha$ by the assumption, hence $J_i'\langle \beta\gamma \rangle < \omega_\alpha$ by 4.1.7. Consequently $\mathfrak{D}\mathfrak{b}'\mathfrak{F}_i(\bar{x}, \bar{y}) < \omega_\alpha$.

4.5.2.* $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in \mathbb{M}$, $\bar{x} \cdot \bar{y} \in \mathbb{M}$, $\mathfrak{D}\delta'(\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle) < \omega_\alpha$, $\mathfrak{D}\delta'(\bar{x} \cdot \bar{y}) < \omega_\alpha$ if $\mathfrak{D}\delta'(\bar{x}) < \omega_\alpha$ and $\mathfrak{D}\delta'(\bar{y}) < \omega_\alpha$.

PROOF. $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \{\{\bar{x}\} \{\bar{x}\bar{y}\}\}$, $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x} - (\bar{x} - \bar{y})$ and 4.5.2 follows by the repeated applications of the cases $i=1$, $i=3$ of 4.5.1, respectively.

4.5.3.* $\bar{x} + \bar{y} \in \mathbb{M}$ and $\mathfrak{D}\delta'(\bar{x} + \bar{y}) < \omega_\alpha$ if $\mathfrak{D}\delta'(\bar{x}) < \omega_\alpha$ and $\mathfrak{D}\delta'(\bar{y}) < \omega_\alpha$.

PROOF. Put $\beta = \mathfrak{D}\delta'(\bar{x})$, $\gamma = \mathfrak{D}\delta'(\bar{y})$. $\mathcal{M}\text{ar}_\gamma(\{\beta, \gamma\}) < \omega_\alpha$ by the assumption, therefore by 4.1.8 there exists a δ such that $\delta \in \mathfrak{B}(J_0)$, $\mathcal{M}\text{ar}_\gamma(\{\beta, \gamma\}) < \delta < \omega_\alpha$. Put $\bar{z} = \mathfrak{G}'\delta$. $\mathfrak{G}'\delta = \mathfrak{G}''\delta$ by 4.3.14. $\bar{x} = \mathfrak{G}'\beta$ and $\bar{y} = \mathfrak{G}'\gamma$ by 4.3.7, therefore $\bar{x} \in \bar{z}$ and $\bar{y} \in \bar{z}$ and $\bar{z}$ being complete by 4.3.9 $\bar{x} + \bar{y} \subseteq \bar{z}$. It follows that $\bar{x} + \bar{y} = z - ((z - \bar{x}) - \bar{y})$. $\delta < \omega_\alpha$ implies $\mathfrak{D}\delta'(\bar{z}) < \omega_\alpha$, and from the case $i=3$ of 4.5.1 it follows that $\mathfrak{D}\delta'((\bar{z} - \bar{x}) < \omega_\alpha$, $\mathfrak{D}\delta'((z - \bar{x} - \bar{y}) < \omega_\alpha$ and, finally, $\mathfrak{D}\delta'(\bar{x} + \bar{y}) < \omega_\alpha$.

4.5.4.* The power of the set $\bar{x}$ is less than ω_α , provided $\mathfrak{D}\delta'(\bar{x}) < \omega_\alpha$.

PROOF. Put $\beta = \mathfrak{D}\delta'(\bar{x})$. $\bar{x} = \mathfrak{G}'\beta$ by 4.3.7 and $\bar{x} \subseteq \mathfrak{G}''\beta$ by 4.3.9. $\beta < \omega_\alpha$ by the assumption, hence $\bar{\beta} < \omega_\alpha$ by [1], 8.26. Thus $\mathfrak{G}''\beta < \omega_\alpha$ by [1], 8.31. Consequently $\bar{x} < \omega_\alpha$ by [1], 8.28.

4.5.5.* If $\mathfrak{D}\delta'(\bar{x}) < \omega_{\alpha+1}$, $\mathfrak{D}\delta'(\bar{y}) < \omega_{\alpha+1}$, then there exists a $\delta \in \mathfrak{B}(J_0)$, $\delta < \omega_{\alpha+1}$ such that $\bar{x} \times \bar{y} \subseteq \mathfrak{G}'\delta$.²⁸

PROOF. $\bar{x} < \omega_{\alpha+1}$ and $\bar{y} < \omega_{\alpha+1}$ by 4.5.4, hence $\overline{\bar{x} \times \bar{y}} < \omega_{\alpha+1}$ by [1], 8.6.3, and therefore $\mathfrak{D}\delta'(\bar{x} \times \bar{y}) < \omega_{\alpha+1}$ by [1], 8.31. Suppose $z \in \bar{x} \times \bar{y}$. Then $z = \langle uv \rangle$, $u \in \bar{x}$, $v \in \bar{y}$, therefore $u \in \mathbb{M}$, $v \in \mathbb{M}$, $\mathfrak{D}\delta'(u) < \omega_{\alpha+1}$ and $\mathfrak{D}\delta'(v) < \omega_{\alpha+1}$ by 4.3.10. It follows from 4.5.2 that $z \in \mathbb{M}$ and $\mathfrak{D}\delta'(z) < \omega_{\alpha+1}$. Hence we have $\mathfrak{D}\delta'(\bar{x} \times \bar{y}) \subseteq \omega_{\alpha+1}$. It results by 2.1.10 that there exists a $\delta < \omega_{\alpha+1}$ such that $\mathfrak{D}\delta'(\bar{x} \times \bar{y}) \subseteq \delta$ and by 4.1.8 we may suppose $\delta \in \mathfrak{B}(J_0)$. $\bar{x} \times \bar{y} \subseteq \mathfrak{G}''\mathfrak{D}\delta'(\bar{x} \times \bar{y})$ by 4.3.7, consequently $\bar{x} \times \bar{y} \subseteq \mathfrak{G}''\delta = \mathfrak{G}'\delta$.

4.5.6.* $\mathfrak{G}''\omega_\alpha = \omega_\alpha$.

PROOF. $\mathfrak{G}''\omega_\alpha \leq \omega_\alpha$ by 4.5.4. On the other hand, the function $\mathfrak{G}$ is one-to-one on the set $\mathfrak{B}(J_0) \cdot \omega_\alpha$, for if $\beta, \gamma \in \mathfrak{B}(J_0) \cdot \omega_\alpha$ and e. g. $\beta < \gamma$, then $\mathfrak{G}'\beta \in \mathfrak{G}'\gamma$, hence $\mathfrak{G}'\beta \neq \mathfrak{G}'\gamma$. Consequently $\mathfrak{G}''\omega_\alpha \supseteq \mathfrak{G}''(\omega_\alpha \cdot \mathfrak{B}(J_0)) = \omega_\alpha \cdot \mathfrak{B}(J_0)$. But $\omega_\alpha \cdot \mathfrak{B}(J_0) = J_0''\omega_\alpha$ and the function J_0 is one-to-one too, hence $\mathfrak{G}''\omega_\alpha \supseteq \omega_\alpha^2 = \omega_\alpha$. It follows that $\mathfrak{G}''\omega_\alpha = \omega_\alpha$.

²⁸ 4.5.5 remains true even if we write α instead of $\alpha+1$ and it can be proved that $\mathfrak{D}\delta'(\bar{x} \times \bar{y}) < \omega_\alpha$. It is obvious that a more general theorem may be formulated and proved instead of the special cases proved here. But we are not in the need of such a general theorem.

4.5.7.*

$$\begin{aligned} \text{If } \alpha < \xi, \quad & \begin{cases} \mathbb{G}'\alpha = \mathbb{G}'\beta.On & \text{for } \alpha \in \mathfrak{B}(J_9), \\ \mathbb{G}'\alpha = \mathbb{G}'\beta.U_1'\mathbb{G}'\gamma & \text{for } \alpha \in \mathfrak{B}(J_{10}), \\ \mathbb{G}'\alpha = \mathbb{G}'\beta.U_2'\mathbb{G}'\gamma & \text{for } \alpha \in \mathfrak{B}(J_{11}). \end{cases} \\ \text{If } \alpha \geq \xi, \quad & \begin{cases} \mathbb{G}'\alpha = \mathbb{G}'\beta.0 = 0 & \text{for } \alpha \in \mathfrak{B}(J_9), \\ \mathbb{G}'\alpha = \mathbb{G}'\beta.U_1.\mathbb{G}''\xi & \text{for } \alpha \in \mathfrak{B}(J_{10}), \\ \mathbb{G}'\alpha = \mathbb{G}'\beta.U_2.\mathbb{G}''\xi & \text{for } \alpha \in \mathfrak{B}(J_{11}). \end{cases} \end{aligned}$$

where $\beta = K_1'\alpha$, $\gamma = K_2'\alpha$, $\alpha = J_i'\langle\beta, \gamma\rangle$ ($i = 9, 10, 11$).

PROOF. If $\alpha < \xi$, then $\mathbb{G}'\alpha = g'\alpha$ by 4.3.4 and $\beta, \gamma \leq \alpha < \xi$ by 4.1.6 and the statement follows from the definitions 4.3.1, 4.3.2. If $\alpha \geq \xi$, the theorem is true by 4.3.3 and 4.3.4, taking into consideration that $g''\xi = \mathbb{G}''\xi$.

4.5.8.* If, in particular, the parameter ξ is equal to a cardinal number ω_δ , then

$$\begin{aligned} \text{if } \mathfrak{M}\alpha(\{\beta, \gamma\}) < \omega_\delta = \xi, \quad & \begin{cases} \mathbb{G}'J_9'\langle\beta, \gamma\rangle = \mathbb{G}'\beta.On, \\ \mathbb{G}'J_{10}'\langle\beta, \gamma\rangle = \mathbb{G}'\beta.U_1'\mathbb{G}'\gamma, \\ \mathbb{G}'J_{11}'\langle\beta, \gamma\rangle = \mathbb{G}'\beta.U_2'\mathbb{G}'\gamma; \end{cases} \\ \text{if } \mathfrak{M}\alpha(\{\beta, \gamma\}) \geq \omega_\delta = \xi, \quad & \begin{cases} \mathbb{G}'J_9'\langle\beta, \gamma\rangle = \mathbb{G}'\beta.0 = 0, \\ \mathbb{G}'J_{10}'\langle\beta, \gamma\rangle = \mathbb{G}'\beta.U_1.\mathbb{G}''\omega_\delta, \\ \mathbb{G}'J_{11}'\langle\beta, \gamma\rangle = \mathbb{G}'\beta.U_2.\mathbb{G}''\omega_\delta. \end{cases} \end{aligned}$$

4.5.8 follows immediately from 4.5.7, taking into consideration that $\mathfrak{M}\alpha(\{\beta, \gamma\}) < \omega_\alpha \equiv J_i'\langle\beta, \gamma\rangle < \omega_\alpha$ for $i < 12$ by 4.1.6 and 4.1.7.

4.5.9.* If $\xi = \omega_{\delta+1}$ and $\alpha < \omega_{\delta+1}$, then $\mathfrak{D}\mathfrak{b}'\alpha < \omega_{\delta+1}$.²⁹

PROOF. The property of α , $\alpha < \omega_{\delta+1} \supset \mathfrak{D}\mathfrak{b}'\alpha < \omega_{\delta+1}$ is to be proved by induction on α . Suppose that the statement is true for every $\beta < \alpha$ where $\alpha < \omega_{\delta+1}$. From the assumption $\beta < \alpha$ it follows that $\beta < \omega_{\delta+1}$, hence $\mathfrak{D}\mathfrak{b}'\beta < \omega_{\delta+1}$. Consequently, $\mathfrak{D}\mathfrak{b}''\alpha \subseteq \omega_{\delta+1}$ and $\mathfrak{D}\mathfrak{b}''\alpha \leq \alpha < \omega_{\delta+1}$ by [1], 8.26 and [1], 8.31. Then by 2.1.10 there exists an ordinal number γ ($\gamma < \omega_{\delta+1}$) such that $\mathfrak{D}\mathfrak{b}''\alpha \subset \gamma$ and by 4.1.8 we may suppose $\gamma \in \mathfrak{B}(J_0)$. Hence $\alpha \subseteq \mathbb{G}''\mathfrak{D}\mathfrak{b}''\alpha \subseteq \mathbb{G}''\gamma = \mathbb{G}'\gamma.\mathfrak{M}\alpha(\{\gamma, 0\})$ being less than $\omega_{\delta+1}$, $\mathbb{G}'J_9'\langle\gamma, 0\rangle = \mathbb{G}'\gamma.On$ by 4.5.8. Put $\bar{x} = \mathbb{G}'\gamma.On$. $\mathfrak{D}\mathfrak{b}'\bar{x} \leq J_9'\langle\gamma, 0\rangle < \omega_{\delta+1}$ by 4.1.7. It is obvious that $\alpha \subseteq \bar{x}$. But $\bar{x}$ is the intersection of two complete sets, is complete by [1],

²⁹ 4.5.9 remains true if we write δ instead of $\delta + 1$. More generally, it remains true for arbitrary ξ and ω_δ (not depending on ξ) even if the operation $X.On$ is omitted from the construction of the function $\mathbb{G}$. However, we do not need this general theorem and the proof of 4.5.9 is more simple with the help of the operation $X.On$.

6.6.5, and therefore $\bar{x}$, as a set of ordinal numbers, is an ordinal number, too, by [1], 7.1. It follows that either $\alpha \in \bar{x}$ or $\alpha = \bar{x}$. But $\mathfrak{D}\mathfrak{b}'\bar{x} < \omega_{\delta+1}$ in both cases implies by 4.3.10 that $\mathfrak{D}\mathfrak{b}'\alpha < \omega_{\delta+1}$.

4.6. In this section we are going to define the functions h, k already mentioned.

First we define a notion $\mathfrak{h}(U_1, X, Y)$ as follows:

4.6.1.* DEF. $\mathfrak{h}(U_1, X, Y) \equiv U_1 \mathfrak{f}\mathfrak{n} \omega_{X+Y+1}. \mathfrak{I}\mathfrak{n}_2(U_1). \mathfrak{B}(U_1) \subseteq \mathfrak{P}(\omega_X)$.

4.6.2.** $(\exists u_1)\mathfrak{h}(u_1, \lambda, \nu)$.

PROOF. $\omega_\lambda = \aleph_\lambda$ and $2^{\aleph_\lambda} = \mathfrak{P}(\omega_\lambda)$. By the assumption of the Theorem 1, $2^{\aleph_\lambda} \cong \aleph_{\lambda+\nu+1} = \omega_{\lambda+\nu+1}$. But $2^{\aleph_\lambda}$, being a cardinal number, is an ordinal number, hence $\omega_{\lambda+\nu+1} \subseteq 2^{\aleph_\lambda}$. By [1], 8.24 and 8.1 there exists an u such that u is one-to-one, $\mathfrak{D}(u_1) = 2^{\aleph_\lambda}$, and $\mathfrak{B}(u_1) = \mathfrak{P}(\omega_\lambda)$. Put $u_1 = u \upharpoonright \omega_{\lambda+\nu+1}$. It is obvious that $\mathfrak{h}(u_1, \lambda, \nu)$ holds. On the other hand, $(\exists u_1)\mathfrak{h}(u_1, \lambda, \nu)$ implies that $\omega_{\lambda+\nu+1} \leq \overline{\mathfrak{P}(\omega_\lambda)} = 2^{\aleph_\lambda}$, hence we have

4.6.3.* $(\exists u_1)\mathfrak{h}(u_1, \lambda, \nu) \equiv 2^{\aleph_\lambda} \cong \aleph_{\lambda+\nu+1}$.

Let h denote a set for which $\mathfrak{h}(h, \lambda, \nu)$ holds. Such a h exists by 4.6.2 and h is a one-to-one mapping of the set $\omega_{\lambda+\nu+1}$ onto a subset of $\mathfrak{P}(\omega_\lambda)$.

Now we define $\mathfrak{f}(U_2, X, Y)$ as follows:

4.6.4.* DEF. $\mathfrak{f}(U_2, X, Y) \equiv U_2 \mathfrak{f}\mathfrak{n} \omega_{X+Y+1}. (\alpha)(\alpha \in \omega_{X+Y+1} \supset \mathfrak{D}(U_2' \alpha) = \alpha. \mathfrak{B}(U_2' \alpha) = \bar{\alpha}. \mathfrak{I}\mathfrak{n}_2(U_2' \alpha). \mathfrak{N}\mathfrak{el}(U_2' \alpha)).$

4.6.4.1* $(\exists u_2)\mathfrak{f}(u_2, \lambda, \nu)$.

PROOF. Let A be a function defined on the class $V - \{0\}$ which associates to every non-empty set x one of its element. Such an A exists by axiom E. Let B be the class defined by the formula

$$(\langle xy \rangle \in B \equiv (z)(z \in x \equiv \mathfrak{D}(z) = y. \mathfrak{B}(z) = \bar{y}. \mathfrak{I}\mathfrak{n}_2(z). \mathfrak{N}\mathfrak{el}(z))). \mathfrak{N}\mathfrak{el}(B).$$

The existence of B is assured by M_1 [1]. But if y is arbitrary, there exists, by M_1 [1], exactly one class X such that

$$(1) \quad (z)(z \in X \equiv \mathfrak{D}(z) = y. \mathfrak{B}(z) = \bar{y}. \mathfrak{I}\mathfrak{n}_2(z). \mathfrak{N}\mathfrak{el}(z)).$$

If X satisfies (1), then $z \subseteq y \times y$ for every $z \in X$, hence $X \subseteq \mathfrak{P}(y \times y)$, and therefore X is a set by [1], 5.12 and 5.18.

It follows that B is a function which associates to every set y the set of all one-to-one mappings of y and y . Put $C = A \upharpoonright B$. The set $B'y$ is non-empty for every y by [1], 8.24, hence $\mathfrak{B}(B) \subseteq \mathfrak{D}(A)$. Therefore $C \mathfrak{f}\mathfrak{n} V$ and $C'y \in B'y$, hence $\mathfrak{D}(C'y) = y$, $\mathfrak{B}(C'y) = \bar{y}$, $\mathfrak{I}\mathfrak{n}_2(C'y)$, $\mathfrak{N}\mathfrak{el}(C'y)$ for every y . $u_2 = C \upharpoonright \omega_{\lambda+\nu+1}$ is a set and $\mathfrak{f}(u_2, \lambda, \nu)$ holds.

Let k denote a set satisfying $f(k, \lambda, r)$. Now we make the convention different from that used in Section 3. If the sign of an operation depending on the parameters U_1, U_2, ξ appears anywhere without writing out its arguments, then it denotes the value of this operation for $U_1 = h, U_2 = k, \xi = \omega_{\lambda+\nu+1}$, e. g.: $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(h, k, \omega_{\lambda+\nu+1}), \mathfrak{M} = \mathfrak{M}(h, k, \omega_{\lambda+\nu+1})$. Corresponding to this convention the subscript $\mathfrak{M}$ indicates the relativization with respect to the model $\mathcal{J}_{\mathfrak{M}}$ and $\bar{x}, \bar{y}, \dots, X, Y, \dots$ denote the set — and class — variables of this model.

Now we are going to prove that h, k are $\mathfrak{M}$ -sets. We need some preliminary results.

4.6.5.** If $\alpha < \omega_{\lambda+\nu+1}$, then $h'\alpha \in \mathfrak{M}$ and $\mathfrak{D}^b h'\alpha < \omega_{\lambda+\nu+1}$.

PROOF. $h'\alpha \in \mathfrak{M}(h)$ and thus $h'\alpha \in \mathfrak{P}(\omega_\lambda)$ by 4.6.1, hence $h'\alpha \subseteq \omega_\lambda$. $\omega_\lambda < \omega_{\lambda+\nu+1}$, and therefore $\mathfrak{D}^b \omega_\lambda < \omega_{\lambda+\nu+1}$ and $\mathfrak{D}^b h'\alpha < \omega_{\lambda+\nu+1}$ by 4.5.9. Put $\beta = \mathfrak{D}^b \omega_\lambda, \gamma = \mathfrak{D}^b h'\alpha$. Then $\mathfrak{G}'\beta = \omega_\lambda, \mathfrak{G}'\gamma = \alpha$ by 4.3.7 and $\mathfrak{G}'J_{10}(\langle \beta\gamma \rangle) = \mathfrak{G}'\beta.h'\mathfrak{G}'\gamma = \omega_\lambda.h'\alpha = h'\alpha$ by 4.5.8 and thus $h'\alpha \in \mathfrak{M}$. But $J_{10}(\langle \beta\gamma \rangle) < \omega_{\lambda+\nu+1}$ by 4.1.7, therefore $\mathfrak{D}^b h'\alpha < \omega_{\lambda+\nu+1}$.

4.6.6.* If $\alpha < \omega_{\lambda+\nu+1}$, then $k'\alpha \in \mathfrak{M}$ and $\mathfrak{D}^b k'\alpha < \omega_{\lambda+\nu+1}$.

PROOF. $k'\alpha \subseteq \alpha \times \alpha$ by 4.6.4. $\alpha \subseteq \omega_\lambda$ by [1], 8.26, hence α being an ordinal number we have $\mathfrak{D}^b \alpha < \omega_{\lambda+\nu+1}$ and $\mathfrak{D}^b k'\alpha < \omega_{\lambda+\nu+1}$ by 4.5.9. Then by 4.5.5 there exists a $\beta < \omega_{\lambda+\nu+1}$ such that $\alpha \times \alpha \subseteq \mathfrak{G}'\beta$. Put $\gamma = \mathfrak{D}^b \alpha$. Then $\gamma < \omega_{\lambda+\nu+1}$ and $\mathfrak{G}'\gamma = \alpha$ by 4.3.7. Hence $\mathfrak{G}'J_{11}(\langle \beta\gamma \rangle) = \mathfrak{G}'\beta.k'\mathfrak{G}'\gamma = k'\alpha$ by 4.5.8. It follows that $k'\alpha \in \mathfrak{M}$ and using 4.1.7 $\beta, \gamma < \omega_{\lambda+\nu+1}$ implies $\mathfrak{D}^b k'\alpha < \omega_{\lambda+\nu+1}$.

4.6.7.** $h \subseteq \mathfrak{G}''\omega_{\lambda+\nu+1}, k \subseteq \mathfrak{G}''\omega_{\lambda+\nu+1}$.

PROOF. h and k are functions defined on $\omega_{\lambda+\nu+1}$ by 4.6.1 and 4.6.4, thus the elements of h and k are the ordered pairs $\langle h'\alpha \alpha \rangle$ and $\langle k'\alpha \alpha \rangle$ for $\alpha < \omega_{\lambda+\nu+1}$, respectively. But $h'\alpha, k'\alpha$ are elements of $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{D}^b \alpha, \mathfrak{D}^b h'\alpha, \mathfrak{D}^b k'\alpha < \omega_{\lambda+\nu+1}$ by 4.5.9, 4.6.5 and 4.6.6, hence $\langle h'\alpha \alpha \rangle \in M, \langle k'\alpha \alpha \rangle \in \mathfrak{M}$ and $\mathfrak{D}^b \langle h'\alpha \alpha \rangle < \omega_{\lambda+\nu+1}, \mathfrak{D}^b \langle k'\alpha \alpha \rangle < \omega_{\lambda+\nu+1}$ by 4.5.2. This means that $\langle h'\alpha \alpha \rangle \in \mathfrak{G}''\omega_{\lambda+\nu+1}, \langle k'\alpha \alpha \rangle \in \mathfrak{G}''\omega_{\lambda+\nu+1}$, hence $h, k \subseteq \mathfrak{G}''\omega_{\lambda+\nu+1}$.

4.6.8.** $h, k \in \mathfrak{M}$.

PROOF. $\text{Mar}(\{\omega_{\lambda+\nu+1}0\}) = \omega_{\lambda+\nu+1}, \omega_{\lambda+\nu+1} \in \mathfrak{M}(J_0)$ by 4.1.7, and therefore $\mathfrak{G}'\omega_{\lambda+\nu+1} = \mathfrak{G}''\omega_{\lambda+\nu+1}$ by 4.3.14. We get from 4.5.8

$$\mathfrak{G}'J_{10}(\langle \omega_{\lambda+\nu+1}0 \rangle) = \mathfrak{G}''\omega_{\lambda+\nu+1}.h.\mathfrak{G}''\omega_{\lambda+\nu+1},$$

$$\mathfrak{G}'J_{11}(\langle \omega_{\lambda+\nu+1}0 \rangle) = \mathfrak{G}'\omega_{\lambda+\nu+1}.k.\mathfrak{G}''\omega_{\lambda+\nu+1}.$$

It follows from 4.6.7 that $\mathfrak{G}'J_{10}(\langle \omega_{\lambda+\nu+1}0 \rangle) = h, \mathfrak{G}'J_{11}(\langle \omega_{\lambda+\nu+1}0 \rangle) = k$, and therefore $h, k \in \mathfrak{M}$.

Now we are going to prove that the model determined by the class $\mathfrak{M}$ satisfies axiom E. The notions $X \in Y$, $\mathfrak{Cm}(X)$, $\mathfrak{Un}(X)$ and the operation $\langle XY \rangle$ being absolute with respect to $\mathcal{A}_{\mathfrak{M}}$ by 2.2.5, 2.2.7, 4.3.11, 4.3.16 and 4.3.17, we have to prove

$$4.6.9.** (E)_{\mathfrak{M}}; (\exists \bar{A}) (\mathfrak{Un}(\bar{A}).(\bar{x}) (\sim \mathfrak{Cm}(\bar{x}) \supset (\exists \bar{y}) (\langle \bar{y}\bar{x} \rangle \in \bar{A}. \bar{y} \in \bar{x}))).$$

PROOF. The operation $\mathfrak{U}\mathfrak{S}(U_1, U_2, Z)$ is absolute with respect to $\mathcal{A}_{\mathfrak{M}}$ by 4.3.11, 4.3.16, 4.3.17 and 4.4.9. But $h, k, \omega_{\lambda+\nu+1}$ being $\mathfrak{M}$ -sets (h and k by 4.6.8), the class $\mathfrak{U}\mathfrak{S} = \mathfrak{U}\mathfrak{S}(h, k, \omega_{\lambda+\nu+1})$ is an $\mathfrak{M}$ -class by the meta-theorem AB_2 .

The $\mathfrak{M}$ -class $\bar{A} = \mathfrak{U}\mathfrak{S}$ satisfies $(E)_{\mathfrak{M}}$. In fact, $\mathfrak{U}\mathfrak{S} \mathfrak{Fm}(\mathfrak{M} - \{0\})$ by 4.3.13 and $\mathfrak{U}\mathfrak{S} \bar{x} \in \bar{x}$ for every $\bar{x} \in \mathfrak{M} - \{0\}$, i. e. for every $\bar{x}$, provided $\sim \mathfrak{Cm}(\bar{x})$. It follows that $\mathfrak{Un}(\mathfrak{U}\mathfrak{S})$ and that for every non-empty $\bar{x}$ there exists and $\bar{y}$, e. g. $= \mathfrak{U}\mathfrak{S} \bar{x}$, such that $\langle \bar{y}\bar{x} \rangle \in \mathfrak{U}\mathfrak{S}$ and $\bar{y} \in \bar{x}$.

4.6.10.** $\mathcal{P}_0^*(\mathfrak{M})$, i. e. the axioms of Σ^* hold in $\mathcal{A}_{\mathfrak{M}}$.

4.6.10 follows from 4.3.17 and 4.6.9.

4.7. In this section we are going to prove that the class $\mathfrak{M}$ satisfies the formula $(+)$ and we are going to reduce the proof of Theorem 1 to the proof of a theorem analogous to GÖDEL's theorem which asserts that $V=L$ implies $(\alpha) (2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$. The proof of this theorem will be given in Sections 4.8, 4.9, 4.10.

We have proved in 4.6.10 $\psi_0^*(\mathfrak{M})$, and therefore the relativized of the concepts defined in Σ^* exist and the relativized of the theorems proved in Σ^* hold. $\mathfrak{M}$ is complete and almost universal by 4.3.11 and 4.3.16, consequently the concepts listed in 2.2.5, 2.2.7 are absolute with respect to $\mathcal{A}_{\mathfrak{M}}$ and the equalities 2.2.6 hold for $\mathfrak{M}$. We shall make use of these facts without referring to them. In what follows instead of "absolute with respect to $\mathcal{A}_{\mathfrak{M}}$ " we briefly say absolute. First we need some preliminary results.

$$4.7.1.** \bar{u} \simeq_{\mathfrak{M}} \bar{r} \text{ if } \bar{u} \simeq_{\mathfrak{M}} \bar{v}.$$

PROOF. $\bar{u} \simeq_{\mathfrak{M}} \bar{r} \equiv (\exists \bar{w}) (\mathfrak{D}(\bar{w}) = \bar{u}. \mathfrak{B}(\bar{w}) = \bar{r}. \mathfrak{Un}_2(\bar{w}). \mathfrak{Rel}(\bar{w}))$, since $\bar{u} \simeq_{\mathfrak{M}} \bar{v} \equiv (\exists \bar{w}) (\mathfrak{D}(\bar{w}) = \bar{u}. \mathfrak{B}(\bar{w}) = \bar{v}. \mathfrak{Un}_2(\bar{w}). \mathfrak{Rel}(\bar{w}))$ by [1], 8.12 and $\mathfrak{Un}_2(X)$, $\mathfrak{Rel}(X)$, $\mathfrak{D}(X)$, $\mathfrak{B}(X)$ are absolute.

Hence $\bar{u} \simeq_{\mathfrak{M}} \bar{v}$ implies $\bar{u} \simeq_{\mathfrak{M}} \bar{r}$.

$$4.7.2.** N \subseteq N_{\mathfrak{M}}.$$

PROOF. $N \subseteq \text{On}$ by [1], 8.22, therefore, On being absolute, $N \subseteq \mathfrak{M}$. Hence we have to prove that $\bar{x} \in N$ implies $\bar{x} \in N_{\mathfrak{M}}$.

$\bar{x} \in N \equiv \mathfrak{Drd}(\bar{x}).(u)(u \in \bar{x} \supset \sim u \simeq \bar{x})$ (see [1], p. 31). It follows that $\bar{x} \in N_{\mathfrak{M}} \equiv \mathfrak{Drd}(\bar{x}).(\bar{u})(\bar{u} \in \bar{x} \supset \sim \bar{u} \simeq_{\mathfrak{M}} \bar{x})$. Suppose $\sim \bar{x} \in N_{\mathfrak{M}}$. Then either

$\sim \text{Ord}(\bar{x})$, hence $\sim \bar{x} \in N$, or there exists a $\bar{u}$ such that $\bar{u} \simeq_{\mathfrak{M}} \bar{x}$ and $\bar{u} \in \bar{x}$. Hence $\bar{u} \simeq \bar{x}$ by 4.7.1, and therefore $\sim \bar{x} \in N$.

4.7.3.** $\aleph_{\mathfrak{M}} \mathfrak{F}n On$; $\aleph_{\mathfrak{M}}' \alpha \leq \aleph' \alpha$.

PROOF. $\aleph \mathfrak{F}n On$ by [1], 8.57, and therefore $\aleph_{\mathfrak{M}} \mathfrak{F}n On$, since $X \mathfrak{F}n Y$ and On are absolute. Further $\aleph_{\mathfrak{M}} \mathfrak{I} \mathfrak{S}om_{E, \mathfrak{M}, E, \mathfrak{M}}(On, N'_{\mathfrak{M}})$ by [1], 8.57, $X \mathfrak{I} \mathfrak{S}om_{R, S}(Y, Z)$ being absolute by 2.2.8. It follows that $G = \aleph | \aleph_{\mathfrak{M}}^{-1}$ is a strictly monotonic mapping of the class $N'_{\mathfrak{M}}$ onto N , i. e. $G' \beta < G' \gamma$ if $\beta < \gamma$, $\beta, \gamma \in N'_{\mathfrak{M}}$.

On the other hand $N' = N - \omega$, hence $N'_{\mathfrak{M}} = N_{\mathfrak{M}} - \omega$ and thus $N' \subseteq N'_{\mathfrak{M}}$ by 4.7.2. Therefore by [1], 7.611 $G' \beta \geq \beta$ for every $\beta \in N'_{\mathfrak{M}}$. Put $\beta = \aleph_{\mathfrak{M}}' \alpha$. Then $\beta \in N'_{\mathfrak{M}}$ and $G' \beta = G'(\aleph_{\mathfrak{M}}' \alpha) = \aleph'(\aleph_{\mathfrak{M}}^{-1}(\aleph_{\mathfrak{M}}' \alpha)) = \aleph' \alpha \geq \beta = \aleph_{\mathfrak{M}}' \alpha$.

4.7.4.** $\gamma \simeq_{\mathfrak{M}} \bar{\gamma}$ if $\gamma < \omega_{\lambda + \nu + 1}$.

PROOF. $\gamma \simeq_{\mathfrak{M}} \bar{\gamma} \equiv (\exists \bar{w})(\mathfrak{D}(\bar{w}) = \gamma, \mathfrak{B}(\bar{w}) = \bar{\gamma}, \text{Un}_2(\bar{w}), \mathfrak{R}el(\bar{w}))$ by [1], 8.12. $k' \gamma \in \mathfrak{M}$ by 4.6.6. Put $k' \gamma = \bar{w}$. Then $\mathfrak{D}(\bar{w}) = \gamma$, $\mathfrak{B}(\bar{w}) = \bar{\gamma}$, $\text{Un}_2(\bar{w})$, $\mathfrak{R}el(\bar{w})$ by 4.6.4.

Now we can prove that $\mathfrak{M}$ satisfies $(+)$, i. e.

4.7.5.** $\alpha \leq \lambda + \nu + 1 \supset \aleph_{\mathfrak{M}}' \alpha = \aleph' \alpha$.

PROOF. The formula appearing in 4.7.5 being normal we may prove this by transfinite induction on α . $\aleph' 0 = \omega$, $\aleph_{\mathfrak{M}}' 0 = \omega_{\mathfrak{M}}$, hence ω being absolute we have $\aleph' 0 = \aleph_{\mathfrak{M}}' 0$. $X \leq Y$ being absolute, $\omega = \aleph_{\mathfrak{M}}' 0 \leq \aleph_{\mathfrak{M}}' \alpha$, for every α , hence $\aleph_{\mathfrak{M}}' \alpha$ is infinite. Therefore $\aleph_{\mathfrak{M}}' \alpha = \aleph' \delta$ for a δ . Suppose that α is the least ordinal number for which $\aleph_{\mathfrak{M}}' \alpha \neq \aleph' \alpha$. We have to prove that $\alpha \leq \lambda + \nu + 1$ leads to a contradiction.

Put $\gamma = \aleph_{\mathfrak{M}}' \alpha$. $\gamma \leq \aleph' \alpha$ by 4.7.3, hence $\gamma < \aleph' \alpha \leq \aleph'(\lambda + \nu + 1) = \omega_{\lambda + \nu + 1}$. It follows from 4.7.4 that $\gamma \simeq_{\mathfrak{M}} \bar{\gamma}$, i. e. $\aleph_{\mathfrak{M}}' \alpha \simeq_{\mathfrak{M}} \aleph' \delta$ where $\delta < \alpha$, since $\gamma < \aleph' \alpha$. On the other hand, δ being less than α , $\aleph' \delta = \aleph_{\mathfrak{M}}' \delta$, hence $\aleph_{\mathfrak{M}}' \alpha \simeq_{\mathfrak{M}} \aleph_{\mathfrak{M}}' \delta$ in contradiction to the fact that the function $\aleph$ is strictly monotone.

4.7.6.** $\mathfrak{h}_{\mathfrak{M}}(h, \lambda, \nu)$.

PROOF. $\mathfrak{h}_{\mathfrak{M}}(\bar{U}_1, \bar{X}, \bar{Y}) \equiv \bar{U}_1 \mathfrak{F}n \aleph_{\mathfrak{M}}' \bar{X} + \bar{Y} + 1, \text{Un}_2(\bar{U}_1), \mathfrak{B}(\bar{U}_1) \subseteq \mathfrak{P}(\aleph_{\mathfrak{M}}' X), \mathfrak{M}$ by 4.6.1, and thus we have to prove that the formulas $h \mathfrak{F}n \aleph_{\mathfrak{M}}'(\lambda + \nu + 1)$, $\text{Un}_2(h)$, $\mathfrak{B}(h) \subseteq \mathfrak{P}(\aleph_{\mathfrak{M}}' \lambda), \mathfrak{M}$ hold.

The first formula follows from $h \mathfrak{F}n \omega_{\lambda + \nu + 1}$ using 4.7.5 for $\alpha = \lambda + \nu + 1$, while the second follows directly from $\mathfrak{h}(h, \lambda, \nu)$ too. As to the third one it also follows from $\mathfrak{h}(h, \lambda, \nu)$ using 4.7.5 for $\alpha = \lambda$ — taking into consideration the equality $\mathfrak{P}_{\mathfrak{M}}(X) = \mathfrak{P}(X), \mathfrak{M}$ and the inclusion $\mathfrak{B}(h) \subseteq \mathfrak{M}$ (4.6.5).

4.7.7.** $(2^{\aleph_{\mathfrak{M}}' \lambda})_{\mathfrak{M}} \equiv \aleph_{\mathfrak{M}}'(\lambda + \nu + 1)$.

PROOF. 4.7.7 follows from 4.6.3, 4.6.8 and 4.7.6.

4.7.8.** $(\exists \bar{u}_1)(\exists \bar{u}_2)(V_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{M}}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \aleph_{\lambda+\nu+1}))$.

PROOF. $h, k \in \mathfrak{M}$ by 4.6.8. Put $\bar{u}_1 = h$, $\bar{u}_2 = k$. We know that $V_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \restriction \mathfrak{M}(h, k, \omega_{\lambda+\nu+1})$. On the other hand, $\mathfrak{M}(U_1, U_2, Z)$ being absolute with respect to $\mathcal{J}_{\mathfrak{M}}$ by 4.4.7, we have $\mathfrak{M}(h, k, \omega_{\lambda+\nu+1}) = \mathfrak{M}_{\mathfrak{M}}(h, k, \omega_{\lambda+\nu+1})$ and taking into consideration that $\aleph_{\lambda+\nu+1} = \omega_{\lambda+\nu+1}$ by 4.7.5, we get that $V_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{M}}(h, k, \aleph_{\lambda+\nu+1})$ and thus 4.7.8 is proved.

4.7.9.* $(\alpha)(\beta)((\exists u_1)(\exists u_2)(V = \mathfrak{M}(u_1, u_2, \aleph_{\alpha+\beta+1})) \supset$
 $\supset (\varrho)(\varrho < \alpha + \beta + 1 \supset 2^{\aleph_{\varrho}} \leq \aleph_{\alpha+\beta+1}). (\mu)(\alpha + \beta < \mu \supset 2^{\aleph_{\mu}} = \aleph_{\mu+1}))$.

We are going to prove 4.7.9 in Sections 4.8, 4.9, 4.10. Now using 4.7.9 we finish the proof of Theorem 1.

4.7.10.** $(\varrho)(\lambda \leq \varrho < \lambda + \nu + 1 \supset (2^{\aleph_{\varrho}})_{\mathfrak{M}} = \aleph_{\lambda+\nu+1})$.

$(\mu)(\lambda + \nu \leq \mu \supset (2^{\aleph_{\mu}})_{\mathfrak{M}} = \aleph_{\mu+1})$.

PROOF. The axioms of Σ^* hold in the model $\mathcal{J}_{\mathfrak{M}}$, hence the relativized of 4.7.9 holds too. Therefore we have

$(\alpha)(\beta)[(\exists \bar{u}_1)(\exists \bar{u}_2)(V_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{M}}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \aleph_{\alpha+\beta+1})) \supset$
 $\supset (\varrho)(\varrho < \alpha + \beta + 1 \supset (2^{\aleph_{\varrho}})_{\mathfrak{M}} \leq \aleph_{\alpha+\beta+1}).$
 $(\mu)(\alpha + \beta < \mu \supset (2^{\aleph_{\mu}})_{\mathfrak{M}} = \aleph_{\mu+1})]$

by the absoluteness of the concepts appearing without the subscript $\mathfrak{M}$. It results that

$(\exists \bar{u}_1)(\exists \bar{u}_2)(V_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{M}}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \aleph_{\lambda+\nu+1})) \supset$
 $\supset (\varrho)(\varrho < \lambda + \nu + 1 \supset (2^{\aleph_{\varrho}})_{\mathfrak{M}} \leq \aleph_{\lambda+\nu+1}).$
 $(\mu)(\lambda + \nu < \mu \supset (2^{\aleph_{\mu}})_{\mathfrak{M}} = \aleph_{\mu+1})$

holds too. On the other hand,

$(\exists \bar{u}_1)(\exists \bar{u}_2)(V_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{M}}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \aleph_{\lambda+\nu+1}))$

by 4.7.8, hence we have

$(\varrho)(\varrho < \lambda + \nu + 1 \supset (2^{\aleph_{\varrho}})_{\mathfrak{M}} \leq \aleph_{\lambda+\nu+1}).$
 $(\mu)(\lambda + \nu < \mu \supset (2^{\aleph_{\mu}})_{\mathfrak{M}} = \aleph_{\mu+1}).$

Comparing this with 4.7.7 we obtain 4.7.10. But 4.7.10 means that $\mathfrak{M}$ satisfies $(++)$ and $(+++)$. Now by 4.3.11, 4.3.17, 4.6.10, 4.7.5 and 4.7.10 the class $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(h, k, \omega_{\lambda+\nu+1})$ satisfies all the requirements of Theorem 1 and thus Theorem 1 is proved, provided that the proof of 4.7.9 will be carried out in Σ^* .

4.8. PROOF OF 4.7.9.

Let λ, ν be two ordinal numbers for which $(\exists u_1)(\exists u_2)(V = \mathfrak{M}(u_1, u_2, \omega_{\lambda+\nu+1}))$ and let h and k denote such sets for which

$$(-) V = \mathfrak{M}(h, k, \omega_{\lambda+\nu+1}).$$

We have to prove, using $(-)$, the formulas

$$(- -) (\varphi)(\varphi < \lambda + \nu + 1 \supset 2^{\aleph_\varphi} \leq \aleph_{\lambda+\nu+1}),$$

$$(- - -) (\mu)(\lambda + \nu < \mu \supset 2^{\aleph_\mu} = \aleph_{\mu+1}).$$

We need several preliminary results,³⁰ but before proving them we sketch the idea of the proof. As we have already mentioned, theorem 4.7.9 is the analogue of the theorem proved in [1], VIII, that $V = L$ implies the generalized continuum hypothesis. The proof of this theorem in [1] is based upon the auxiliary theorem proved in [1], 12.6. It is obvious that we have to prove an auxiliary theorem similar to [1], 12.6. But, in [1], 12.6 it is essentially used that the fundamental operations $\tilde{\mathfrak{F}}_i(X, Y)$ ($i = 1, \dots, 8$) used at the construction of the function F are very simple and of constructive character. Our operations used at the construction of the function $\mathfrak{G}$ (especially the operations $\mathfrak{G}_{10}$ and $\mathfrak{G}_{11}$) have not all the properties of the $\tilde{\mathfrak{F}}_i$'s needed to the proof of [1], 12.6. However, for the α 's greater than $\omega_{\lambda+\nu+1}$ our function $\mathfrak{G}$ is constructed quite similarly to GÖDEL'S F , and therefore we can prove a theorem similar to [1], 12.6 formulating some further restrictions for the sets of ordinal numbers m and m' appearing in [1], 12.6.

However, this would only enable us to prove the formula $(- - -)$ for $\mu > \lambda + \nu$, while for the proof of $(- -)$ we need a further generalization of [1], 12.6 which deals with the "isomorphism" of the functions $\mathfrak{G}(h, k, \xi_1)$, $\mathfrak{G}(h, k, \xi_2)$ where ξ_1, ξ_2 may be different ordinal numbers. This theorem will be given in 4.9. We mention that using the assumption $(-)$ we may always use the theorems proved in Sections 4.1—4.5 for every $\mathfrak{M}$ -set as theorems valid for every set.

We introduce the following notations. If $\mathfrak{A}(U_1, U_2, Z)$ is an arbitrary operation defined in Section 4.3, $\mathfrak{A}(h, k, \xi)$ is denoted by $\mathfrak{A}_\xi$. If, especially, $\xi = \omega_{\lambda+\nu+1}$, then $\mathfrak{A}_{\lambda+\nu+1} = \mathfrak{A}$.

We need the following definitions. The class X is said to be ξ -closed if it is closed with respect to $\mathfrak{C}_\xi, K_1, K_2$ and with respect to $J_0, \dots, J_{11}$ as triadic relations. $\mathfrak{C}_{\text{fos}}(X)_\xi$ denotes that X is ξ -closed.³¹

³⁰ Every theorem proved in 4.8, 4.9, 4.10 may depend on the assumption $V = \mathfrak{M}(h, k, \omega_{\lambda+\nu+1})$.

³¹ In accordance with the above made convention $\mathfrak{C}_{\text{fos}}(X)_{\omega_{\lambda+\nu+1}}$ is denoted by $\mathfrak{C}_{\text{fos}}(X)$ and we say briefly closed instead of $\omega_{\lambda+\nu+1}$ -closed.

4. 8. 1. DEF. $\mathcal{C}l_{\mathfrak{S}}(X)_{\xi} \equiv \mathcal{C}l_{\mathfrak{S}_2}(X, \mathcal{C}_{\xi}). \mathcal{C}l_{\mathfrak{S}_2}(X, K_1). \mathcal{C}l_{\mathfrak{S}_2}(X_2, K_2).$
 $\mathcal{C}l_{\mathfrak{S}_3}(X, J_0) \dots \mathcal{C}l_{\mathfrak{S}_3}(X, J_{11}).$

The closure of a class X with respect to $\mathcal{C}_{\xi}, K_1, K_2$ and with respect to $J_0, \dots, J_{11}$ as triadic relations is denoted by $[X]_{\xi}$, and is said to be the ξ -closure of X ($[X]_{\omega_{\lambda+\nu+1}} = [X]$).

4. 8. 2. DEF. $[X]_{\xi} = [X]_{(\mathcal{C}_{\xi}, K_1, K_2)(J_0, \dots, J_{11})}.$

4. 8. 3. $\mathcal{G}_{\xi_1}'\alpha = \mathcal{G}_{\xi_2}'\alpha$ if $\alpha < \xi_1$ and $\alpha < \xi_2$.

PROOF. $\mathcal{G}_{\xi_1}'\alpha = \mathcal{G}_{\xi_1}'\alpha, \mathcal{G}_{\xi_2}'\alpha = \mathcal{G}_{\xi_2}'\alpha$ by 4. 3. 4. But if e. g. $\xi_1 < \xi_2$, then $\mathcal{G}_{\xi_1} = \mathcal{G}_{\xi_2} \upharpoonright \xi_1$ by 4. 3. 2.

4. 8. 4. $\mathcal{C}l_{\mathfrak{S}}(X)_{\xi}. \mathcal{C}l_{\mathfrak{S}}(Y)_{\xi} \supset \mathcal{C}l_{\mathfrak{S}}(X.Y)_{\xi}.$

PROOF. 4. 8. 4 follows from 2. 1. 12.

4. 8. 5. The ξ -closure of a set x is ξ -closed, $x \subseteq [x]_{\xi}$ and $[\overline{x}]_{\xi} = \overline{x}$, provided x is infinite.

PROOF. 4. 8. 5 follows from the definition 2. 1. 13 by [1], 8. 7. 3 using that $\mathcal{C}_{\xi}, K_1, K_2$ and $J_0, \dots, J_{11}$ are functions.

4. 8. 6. If $m \subseteq On$ and $m' \subseteq On$; m, m' both closed with respect to K_1, K_2 and J_i ($i = 0, \dots, 11$) as triadic relations, and if $G \cong_{\mathfrak{S}om_{E,E}}(m, m')$, then G is an isomorphism for the triadic relations J_i .

PROOF. Similarly to [1], 12. 5.

4. 8. 7. If $m \subseteq On$ and m is closed with respect to K_1, K_2 and J_i ($i = 0, \dots, 11$) as triadic relations and $G \cong_{\mathfrak{S}om_{E,E}}(m, \mathcal{G})$, then $\mathcal{G}$ is ξ -closed for every ξ .

PROOF. We have $\mathcal{C}_{\xi}'\alpha \leq \alpha$ for every α by 4. 3. 20, hence $\mathcal{G}$ is closed with respect to $\mathcal{C}_{\xi}$. The fact that $\mathcal{G}$ is closed with respect to K_1, K_2 and J_i ($i = 0, \dots, 11$) may be proved as the analogous theorem in [1], 12. 4. The details of the proof are left to the reader.

4. 8. 8. Suppose $n \subseteq On$, $n < \omega_{\lambda+\nu+1}$, then there exists an m ($m \subseteq On$) and a ξ such that

- $n \subseteq m$,
- m is closed,
- $m < \omega_{\lambda+\nu+1}$,
- $m \cdot \omega_{\lambda+\nu+1} = \xi$,

and as a corollary of a), b), c) and d) ξ is closed, $\xi \in \mathfrak{R}(J_0)$ and $\xi < \omega_{\lambda+\nu+1}$.

PROOF. We consider a function f defined on ω as follows:

$f \restriction \omega$,

$$f^c 0 = n,$$

$$f^c l + 1 = [\mathfrak{S}(f^c l, \omega_{\lambda+\nu+1}) + f^c l].$$

Such an f exists by [1], 8.45 because by M_5 [1] there exists a function G for which $G^c x = [\mathfrak{S}(x, \omega_{\lambda+\nu+1}) + x]$ for every x , since the operations $X + Y$, $X.Y$, $\mathfrak{S}(X)$ and $[X]$ are normal and $x + y$, $x.y$, $\mathfrak{S}(x)$ and $[x]$ are sets for every set x and y by [1], 5.11, 5.12 and by 4.8.5.

Put $m = \mathfrak{S}(\mathfrak{B}(f))$.

Put $m = \mathfrak{S}(\mathfrak{B}(f))$. We have to prove that m satisfies the requirements of the theorem. $m \subseteq On$, since $\mathfrak{B}(\mathfrak{C}) \subseteq On$, $\mathfrak{B}(K_1) \subseteq On$, $\mathfrak{B}(K_2) \subseteq On$, $\mathfrak{B}(J_i) \subseteq On$.

Ad a) $f^c l \subseteq m$ for every l , hence $f^c 0 = n \subseteq m$.

Ad b) $f^c l \subseteq f^c l + 1$ by 4.8.5. It follows by induction on s that $l < s$ implies $f^c l \subseteq f^c s$. Now m is closed with respect to $\mathfrak{C}$, K_1 , K_2 , because if $u \in m$, then there exists an l such that $u \in f^c l$, and therefore $\mathfrak{C}^c u, K_1^c u, K_2^c u \in f^c l + 1$, hence $\mathfrak{C}^c u, K_1^c u, K_2^c u \in m$. On the other hand, if $u \in m$ and $v \in m$, then there exists an l and an s such that $u \in f^c l$, $v \in f^c s$. We may suppose $l \leq s$. Then $u \in f^c s$ holds too, and therefore $J_i^c \langle u, v \rangle \in f^c s + 1$, hence $J_i^c \langle u, v \rangle \in m$ for $i = 0, \dots, 11$. Thus m is closed.

Ad c) First we prove by induction on l that $\overline{f^c l} < \omega_{\lambda+\nu+1}$. $f^c 0 = n$ and $\bar{n} < \omega_{\lambda+\nu+1}$ by the assumption. Suppose $\overline{f^c l} < \omega_{\lambda+\nu+1}$. Then $\overline{f^c l, \omega_{\lambda+\nu+1}} < \omega_{\lambda+\nu+1}$ by [1], 8.28. But $f^c l, \omega_{\lambda+\nu+1} \subseteq \omega_{\lambda+\nu+1}$, hence by 2.1.10 there exists a $\delta < \omega_{\lambda+\nu+1}$ such that $f^c l, \omega_{\lambda+\nu+1} \subset \delta$.³² It follows that $\mathfrak{S}(f^c l, \omega_{\lambda+\nu+1}) \subseteq \delta$, hence $\overline{\mathfrak{S}(f^c l, \omega_{\lambda+\nu+1})} \subseteq \delta < \omega_{\lambda+\nu+1}$ by [1], 8.26. Therefore $\overline{\mathfrak{S}(f^c l, \omega_{\lambda+\nu+1}) + f^c l} < \omega_{\lambda+\nu+1}$ by [1], 8.63. Finally, it follows from 4.8.5 that $\overline{f^c l + 1} < \omega_{\lambda+\nu+1}$,³³ and therefore $\overline{f^c l} < \omega_{\lambda+\nu+1}$ for every l . It follows by [1], 8.64 that $m \subseteq \overline{\omega_{\lambda+\nu} \times \omega} = \omega_{\lambda+\nu} < \omega_{\lambda+\nu+1}$.

Ad d) We have to prove that $m, \omega_{\lambda+\nu+1}$ is an ordinal number. By [1], 7.1 it is enough to prove that $m, \omega_{\lambda+\nu+1}$ is complete. Suppose $u \in m, \omega_{\lambda+\nu+1}$. Then, $\omega_{\lambda+\nu+1}$ being an ordinal number, $u \subseteq \omega_{\lambda+\nu+1}$, hence we have to prove that $u \subseteq m$ holds too. But if $u \in m, \omega_{\lambda+\nu+1}$, then $u \in f^c l$ for some l , and therefore $u \subseteq \mathfrak{S}(f^c l, \omega_{\lambda+\nu+1})$, hence $u \subseteq f^c l + 1$ by 4.8.5, and thus $u \subseteq m$.

Put $m, \omega_{\lambda+\nu+1} = \xi$. Then $\xi \in \mathfrak{B}(I_0)$ by 4.1.6, ξ is closed by 4.8.4, $\omega_{\lambda+\nu+1}$ being closed by 4.1.7, and $\xi < \omega_{\lambda+\nu+1}$ implies $\xi < \omega_{\lambda+\nu+1}$. 4.8.8 is needed to the proof of $(- -)$. It is obvious that 4.8.8 remains valid if we write any "regular" cardinal number instead of $\omega_{\lambda+\nu+1}$.

4.9. In this section we are going to prove the generalization of [1], 12.6 mentioned in 4.8. First we state it in the following form which corresponds to [1], 12.3:

³² At this point the regularity of the cardinal number $\omega_{\lambda+\nu+1}$ is essentially used.

³³ It is obvious that we may suppose n to be infinite.

4.9.1. Is the set $m \subseteq On$ closed, and is $\mathcal{G}$ the ordinal number for which there exists a G such that $G \models \text{Isom}_{E, E}(m, \mathcal{G})$, then if there exists an ordinal number ξ such that $m \cdot \omega_{\lambda+\nu+1} = \xi$, then (abbreviating $G(\alpha)$ by α')

$$(\mathfrak{G}(\alpha \in \mathfrak{G}(\beta \equiv \mathfrak{G}(\alpha' \in \mathfrak{G}(\beta')))).(\mathfrak{G}(\alpha = \mathfrak{G}(\beta \equiv \mathfrak{G}(\alpha' = \mathfrak{G}(\beta'))$$

for every $\alpha, \beta \in m$.

But it is more convenient to prove the theorem in the following symmetric form which corresponds to [1], 12.6:

4.9.2. If $m_1 \subseteq On$, $m_2 \subseteq On$ and m_1 is ξ_1 -closed, m_2 is ξ_2 -closed and there exists a G such that $G \models \text{Isom}_{E, E}(m_1, m_2)$ and $m_1 \cdot \xi_1 = m_2 \cdot \xi_2$, then (if $G(\alpha)$ is abbreviated by α')

$$(\mathfrak{G}_{\xi_1}(\alpha \in \mathfrak{G}_{\xi_1}(\beta \equiv \mathfrak{G}_{\xi_2}(\alpha' \in \mathfrak{G}_{\xi_2}(\beta')))).(\mathfrak{G}_{\xi_1}(\alpha = \mathfrak{G}_{\xi_1}(\beta \equiv \mathfrak{G}_{\xi_2}(\alpha' = \mathfrak{G}_{\xi_2}(\beta'))$$

for every $\alpha, \beta \in m_1$.

4.9.2 is the theorem corresponding to [1], 12.6. The assumption $m_1 \cdot \xi_1 = m_2 \cdot \xi_2$ assures that the parts of m_1 and m_2 for which $\mathfrak{G}_{\xi_1}$ and $\mathfrak{G}_{\xi_2}$ are defined with the help of operations of different character from the fundamental operations are left fixed by the mapping G .

First we prove that 4.9.2 implies 4.9.1. Suppose that the conditions of 4.9.1 hold for $m, \mathcal{G}, \omega_{\lambda+\nu+1}$ and ξ . Put $m_1 = m, m_2 = \mathcal{G}, \xi_1 = \omega_{\lambda+\nu+1}, \xi_2 = \xi$. Then m_2 is ξ_2 -closed by 4.8.7 and $m_1 \cdot \xi_1 = m \cdot \omega_{\lambda+\nu+1} = \xi = \xi_2$. But ξ , being a subset of m , is a subset of $\mathcal{G}$ by 2.1.8, hence $\xi_2 = \xi_2 \cdot \mathcal{G} = \xi_2 \cdot m_2$, i. e. $m_1 \cdot \xi_1 = m_2 \cdot \xi_2$. It follows that the conditions of 4.9.2 hold for m_1, m_2, ξ_1, ξ_2 and thus 4.9.2 implies 4.9.1.

The proof of 4.9.2 is quite similar to the proof of [1], 12.6. The theorem is to be proved by induction on $\iota_i = \text{Var}(\{\alpha\beta\})$, i. e. we have to prove

$$(\alpha)(\beta)(\text{Var}(\{\alpha\beta\})) = \eta \cdot \alpha \in m \cdot \beta \in m \supset (\mathfrak{G}_{\xi_1}(\alpha \in \mathfrak{G}_{\xi_1}(\beta \equiv \mathfrak{G}_{\xi_2}(\alpha' \in \mathfrak{G}_{\xi_2}(\beta')))).$$

$$.(\mathfrak{G}_{\xi_1}(\alpha = \mathfrak{G}_{\xi_1}(\beta \equiv \mathfrak{G}_{\xi_2}(\alpha' = \mathfrak{G}_{\xi_2}(\beta')))).$$

This expression is normal, therefore we can apply induction by [1], 7.161.

Now for the same reasons as in [1] we have to prove that

1. $\mathfrak{G}_{\xi_1}(\alpha \in \mathfrak{G}_{\xi_1}(\eta \equiv \mathfrak{G}_{\xi_2}(\alpha' \in \mathfrak{G}_{\xi_2}(\eta'))$,
2. $\mathfrak{G}_{\xi_1}(\eta \in \mathfrak{G}_{\xi_1}(\beta \equiv \mathfrak{G}_{\xi_2}(\eta' \in \mathfrak{G}_{\xi_2}(\beta'))$,
3. $\mathfrak{G}_{\xi_1}(\alpha = \mathfrak{G}_{\xi_1}(\eta \equiv \mathfrak{G}_{\xi_2}(\alpha' = \mathfrak{G}_{\xi_2}(\eta'))$

under the hypotheses that $\eta \in m_1$ and $\alpha, \beta \in m_1 \cdot \eta$ and

- I. $\mathfrak{G}_{\xi_1}(\alpha \in \mathfrak{G}_{\xi_1}(\beta \equiv \mathfrak{G}_{\xi_2}(\alpha' \in \mathfrak{G}_{\xi_2}(\beta'))$,
- II. $\mathfrak{G}_{\xi_1}(\alpha = \mathfrak{G}_{\xi_1}(\beta \equiv \mathfrak{G}_{\xi_2}(\alpha' = \mathfrak{G}_{\xi_2}(\beta'))$ for $\alpha, \beta \in m_1 \cdot \eta$.

In what follows in Section 4.9 everything depends on these induction hypotheses.

We introduce the following abbreviations:

$$\mathfrak{G}_{\xi_1}^{(i)}(m_1 = r_1, \quad \mathfrak{G}_{\xi_2}^{(i)}(m_2 = r_2, \quad \mathfrak{G}_{\xi_1}^{(i)}(m_1, \eta) = r_{1\eta}, \quad \mathfrak{G}_{\xi_2}^{(i)}(m_2, \eta') = r_{2\eta'}.$$

Now we can define a one-to-one mapping H of $r_{1\eta_i}$ onto $r_{2\eta'_i}$ by $H = \mathfrak{G}_{\xi_2}^{(i)} G \upharpoonright \mathfrak{G}_{\xi_1}^{-1}$ i. e. $H'x = \mathfrak{G}_{\xi_2}^{(i)}\alpha'$ if $x = \mathfrak{G}_{\xi_1}^{(i)}\alpha$, $\alpha \in m_1\eta_i$. Because of the induction hypothesis II, H is one-to-one. Because of the induction hypothesis, H is an isomorphism with respect to E . Note that the hypothesis of theorem 4.9.2 and the induction hypotheses are symmetric in $m_1, m_2; \xi_1, \xi_2$ and η_i, η'_i , so that whatever is proved from them will also hold if $m_1, \eta_i, r_1, r_{1\eta_i}, G, H$ are interchanged with $m_2, \eta'_i, r_2, r_{2\eta'_i}, G^{-1}, H^{-1}$, respectively.

Now the following theorems are to be proved literally in the same way as the corresponding theorems in [1], therefore we omit the proofs:

- (1) r_1 is closed with respect to the fundamental operations.
- (2) $x \in r_1 \supset \mathfrak{D}_{\xi_1}(x \in m_1)$.
- (3) $x \in r_1 \cdot x \neq 0 \supset x \cdot r_1 \neq 0$.
- (3.1) $\{xy\} \in r_1 \supset x, y \in r_1; \langle xy \rangle \in r_1 \supset x, y \in r_1, \langle x, y, z \rangle \in r_1 \supset x, y, z \in r_1$.
- (4) $y \in r_1 \cdot \langle yx \rangle \in Q_i \supset x \in r_1$ if $i \neq 5$.
- (5) $x \in r_{1\eta_i} \cdot y \in r_1 \cdot x \supset y \in r_{1\eta_i}$.
- (6) $y \in \mathfrak{G}_{\xi_1}^{(i)}\eta_i \cdot y \in r_1 \supset y \in r_{1\eta_i}$.
- (7) $\{xy\} \in r_{1\eta_i} \supset x, y \in r_{1\eta_i}; \langle xy \rangle \in r_{1\eta_i} \supset x, y \in r_{1\eta_i}, \langle xyz \rangle \in r_{1\eta_i} \supset x, y, z \in r_{1\eta_i}$.
- (8) H is an isomorphism with respect to the relations $z = \{xy\}, z = \langle xy \rangle, z = \langle xyt \rangle$ and the Q_i ($i = 4, \dots, 8$).

Now with the same considerations as in [1] it is to be seen that it is sufficient to prove 1. $\mathfrak{G}_{\xi_1}^{(i)}\alpha \in \mathfrak{G}_{\xi_1}^{(i)}\eta_i \equiv \mathfrak{G}_{\xi_2}^{(i)}\alpha' \in \mathfrak{G}_{\xi_2}^{(i)}\eta'_i$ for $\alpha \in m_1\eta_i$ and by symmetry reasons it is sufficient to show that

$$\mathfrak{G}_{\xi_1}^{(i)}\alpha \in \mathfrak{G}_{\xi_1}^{(i)}\eta_i \supset \mathfrak{G}_{\xi_2}^{(i)}\alpha' \in \mathfrak{G}_{\xi_2}^{(i)}\eta'_i.$$

Thus we assume $\mathfrak{G}_{\xi_1}^{(i)}\alpha \in \mathfrak{G}_{\xi_1}^{(i)}\eta_i$ and consider the following separate cases:

1. $\eta_i \in \xi_1, \quad i + 2. \quad \eta_i \in \mathfrak{B}(J_i) - \xi_1 \quad (i = 0, \dots, 11).$

Note that $\eta_i \in \xi_1 \equiv \eta'_i \in \xi_2$ and $\eta_i \in \xi_1 \supset \eta_i = \eta'_i$ by the assumption $m_1 \cdot \xi_1 = m_2 \cdot \xi_2$. In fact, $m_1 \cdot \xi_1$ and $m_2 \cdot \xi_2$ are E sections of m_1 and m_2 , respectively, therefore we have $G \upharpoonright m_1 \cdot \xi_1 = I \upharpoonright m_1 \cdot \xi_1$ by 2.1.8.

On the other hand, $\eta_i \in \mathfrak{B}(J_i)$ implies $\eta'_i \in \mathfrak{B}(J_i)$ by 4.8.6, hence $\eta_i \in \mathfrak{B}(J_i) - \xi_1 \equiv \eta'_i \in \mathfrak{B}(J_i) - \xi_2$ for $i = 0, \dots, 11$.

Ad 1. $\eta \in \xi_1$. Then $\eta' \in \xi_2$ and $\alpha < \xi_1$, since $\alpha < \eta$. Thus $\eta = \eta'$, $\alpha = \alpha'$ and $\alpha < \xi_2$, therefore $\mathcal{G}_{\xi_1}(\alpha) = \mathcal{G}_{\xi_2}(\alpha')$ and $\mathcal{G}_{\xi_1}(\eta) = \mathcal{G}_{\xi_2}(\eta')$ by 4.8.3. It follows that $\mathcal{G}_{\xi_2}(\alpha') \in \mathcal{G}_{\xi_2}(\eta')$.

Ad 2—10. The proof is the same as in [1] for the cases 1, 2, 3, 4, 5, 6 (see [1], p. 60), using the results (1)—(8) listed on p. 361, taking into consideration that $\mathcal{G}_i(X, Y)_\xi = \mathcal{F}_i(X, Y)$ for $i = 1, \dots, 8$ by 4.3.1 and 4.3.3.

Ad 11. $\eta \in \mathfrak{B}(J_9) - \xi_1$. In this case our statement is obviously true, since $\mathcal{G}_{\xi_1}(\alpha \in \mathcal{G}_{\xi_1}(\eta)$ is false for every α by 4.5.7.

Ad 12—13. $\eta \in \mathfrak{B}(J_i) - \xi_1$ ($i = 10, 11$). Then $\eta' \in \mathfrak{B}(J_i) - \xi_2$, $\eta_i = J_i(\langle \beta \gamma \rangle)$, $\eta' = J_i(\langle \beta' \gamma' \rangle)$, $\beta, \gamma \in m \cdot \eta$ by 4.1.6 and 4.8.6 and

$$\mathcal{G}_{\xi_1}(\eta) = \mathcal{G}_{\xi_1}(\beta \cdot s \cdot \mathcal{G}_{\xi_1}(\xi_1), \quad \mathcal{G}_{\xi_2}(\eta') = \mathcal{G}_{\xi_2}(\beta' \cdot s \cdot \mathcal{G}_{\xi_2}(\xi_2)$$

by 4.5.7, where $s = h$ or $s = k$ if $i = 10$ or $i = 11$, respectively. $\mathcal{G}_{\xi_1}(\alpha \in \mathcal{G}_{\xi_1}(\eta_i)$ implies that

$$(0) \quad \mathcal{G}_{\xi_1}(\alpha \in \mathcal{G}_{\xi_1}(\beta), \quad (00) \quad \mathcal{G}_{\xi_1}(\alpha \in s, \quad (000) \quad \mathcal{G}_{\xi_1}(\alpha \in \mathcal{G}_{\xi_1}(\xi_1).$$

But then there exists, by (000), a $\delta_1 < \xi_1$ for which $\mathcal{G}_{\xi_1}(\alpha) = \mathcal{G}_{\xi_1}(\delta_1)$. Put $\delta = \mathfrak{Nb}_{\xi_1}(\mathcal{G}_{\xi_1}(\alpha))$. It follows by 4.3.10 that $\delta < \xi_1$. $\delta \in m_1$ by (2). We get $\delta \in m_1 \cdot \eta$ and $\delta \in m_1 \cdot \xi_1$. Hence $\delta = \delta'$, $\delta' \in \xi_2$, and therefore $\mathcal{G}_{\xi_1}(\delta) = \mathcal{G}_{\xi_2}(\delta')$ by 4.8.3. $\mathcal{G}_{\xi_1}(\alpha) = \mathcal{G}_{\xi_1}(\delta)$ by 4.3.7, hence $\mathcal{G}_{\xi_2}(\alpha') = \mathcal{G}_{\xi_2}(\delta')$ by 11.

It follows that

$$(0') \quad \mathcal{G}_{\xi_2}(\alpha \in \mathcal{G}_{\xi_2}(\beta') \text{ by (0) and I;}$$

(00') $\mathcal{G}_{\xi_2}(\alpha' \in s$ by (00), since it follows from the above proved statements that $\mathcal{G}_{\xi_1}(\alpha) = \mathcal{G}_{\xi_2}(\alpha')$; finally

$$(000') \quad \mathcal{G}_{\xi_2}(\alpha' \in \mathcal{G}_{\xi_2}(\xi_2), \text{ since } \mathcal{G}_{\xi_2}(\alpha') = \mathcal{G}_{\xi_2}(\delta') \text{ where } \delta' \in \xi_2.$$

But (0'), (00') and (000') imply $\mathcal{G}_{\xi_2}(\alpha' \in \mathcal{G}_{\xi_2}(\eta')$.

4.10. In this section we are going to prove that $(- -)$ and $(- - -)$ follow from the assumptions of 4.7.9.

4.10.1. If $\mu \geq \lambda + \nu + 1$, $\gamma < \omega_{\mu+1}$, $\gamma \in \mathfrak{B}(J_0)$ and $u \subseteq G(\gamma)$, then $\mathfrak{Nb}(u) < \omega_{\mu+1}$.⁸⁴

PROOF. There exists a δ such that $u = \mathcal{G}(\delta)$ (by $(- -)$). Put $a = \mathfrak{Max}(\{\gamma, \omega_{\lambda+\nu+1}\}) + \{\delta\}$ and $m = [a]$. Then $\bar{a} = \mathfrak{Max}(\{\gamma, \omega_{\lambda+\nu+1}\}) = \mathfrak{Max}(\{\gamma, \omega_{\lambda+\nu+1}\})$ by [1], 8.63, hence $a < \omega_{\mu+1}$ by the assumptions. Therefore $\bar{m} < \omega_{\mu+1}$ by 4.8.5.

By [1], 7.72 there exists an ordinal number $\mathcal{O}$ and a one-to-one mapping G such that $G \cong_{E, E}(m, \mathcal{O})$. Put $\xi = \omega_{\lambda+\nu+1}$. Then $m \cdot \omega_{\lambda+\nu+1} = \xi$ holds, since $\omega_{\lambda+\nu+1} \subseteq m$ by 4.8.5. m being closed by 4.8.5 we can apply 4.9.1 to $\xi = \omega_{\lambda+\nu+1}$.

⁸⁴ Theorem 4.10.1 corresponds to [1], 12.2.

We have $\mathcal{G}'\alpha \in \mathcal{G}'\beta \equiv \mathcal{G}'\alpha' \in \mathcal{G}'\beta'$ for every $\alpha, \beta \in m$ where $G'\alpha$ is abbreviated by α' . On the other hand, $\gamma \subseteq m$, and therefore γ is an E -section of m . It follows that $\gamma \subseteq \mathcal{G}$ and $\alpha = \alpha'$ for $\alpha < \gamma$. It results that $\mathcal{G}'\alpha \in \mathcal{G}'\delta \equiv \mathcal{G}'\alpha \in \mathcal{G}'\delta'$ for every $\alpha < \gamma$, i. e. $\mathcal{G}'\delta \cdot \mathcal{G}''\gamma = \mathcal{G}'\delta' \cdot \mathcal{G}''\gamma$. But $\gamma \in \mathfrak{B}(J_0)$, and so we have $\mathcal{G}'\delta' \cdot \mathcal{G}'\gamma = u$. $\mathcal{G} = m < \omega_{\mu+1}$ and $\delta' \in \mathcal{G}$, hence $\mathfrak{D}\delta' u < \omega_{\mu+1}$ by 4.5.2.

4.10.2. $(\mu)(\lambda + \nu + 1 \leq \mu \supset 2^{\aleph_\mu} = \aleph_{\mu+1})$.

PROOF. $2^{\aleph_\mu} \leq \aleph_{\mu+1}$ by 2.1.15, and so we have to prove that $2^{\aleph_\mu} \leq \aleph_{\mu+1}$ for $\mu \geq \lambda + \nu + 1$. $\mathcal{G}''\omega_\mu = \aleph_\mu$ by 4.5.6 and thus $2^{\aleph_\mu} = \mathfrak{P}(G''\omega_\mu)$ by 2.1.16. On the other hand, $\mathcal{G}''\omega_{\mu+1} = \aleph_{\mu+1}$, therefore by [1], 8.28 it is enough to see that $\mathfrak{P}(\mathcal{G}''\omega_\mu) \subseteq \mathcal{G}''\omega_{\mu+1}$. Suppose $u \in \mathfrak{P}(\mathcal{G}''\omega_\mu)$ and put $\gamma = \omega_\mu$. Then $\mu \geq \lambda + \nu + 1$, $u \in \mathcal{G}''\gamma$, $\gamma \in \mathfrak{B}(J_0)$ (4.1.6) and $\gamma < \omega_{\mu+1}$, hence $\mathfrak{D}\delta' u < \omega_{\mu+1}$ by 4.10.1, i. e. $u \in \mathcal{G}''\omega_{\mu+1}$.

Now to prove (— —) it would be enough to prove $2^{\aleph_{\lambda+\nu}} = \aleph_{\lambda+\nu+1}$. But the proof of this equality is somewhat different from the proof of 4.10.2. We shall prove it proving (— —), and just the proof of this equality makes the main difficulty in our proof. The generalization of the mapping theorem [1], 12.6 formulated in 4.9.2 which deals with the “isomorphism” of $\mathcal{G}_{\xi_1}$, $\mathcal{G}_{\xi_2}$ for different ξ_1 and ξ_2 is essentially needed only in this part of the proof.

First we need the following preliminary result:

4.10.3. If $u \in \mathcal{G}''\gamma$, $\gamma < \omega_{\lambda+\nu+1}$, then there exists a $\xi < \omega_{\lambda+\nu+1}$ such that $\mathfrak{D}\delta'_\xi u < \omega_{\lambda+\nu+1}$.

PROOF. There exists a δ such that $u = \mathcal{G}'\delta$ (by (—)) Put $n = \gamma + \{\delta\}$. Then $n = \gamma < \omega_{\lambda+\nu+1}$ by [1], 8.26 and 8.63. Therefore by 4.8.8 there exists an $m \subseteq On$ such that $n \subseteq m$, and consequently $\gamma \subseteq m$, $\delta \in m$; m is closed, $\overline{m} < \omega_{\lambda+\nu+1}$, furthermore there exists a ξ for which $m \cdot \omega_{\lambda+\nu+1} = \xi$, $\xi < \omega_{\lambda+\nu+1}$, $\xi \in \mathfrak{B}(I_0)$.

By [1], 7.72 there exists a $\mathcal{G}$ and a G such that $G \cong \text{som}_{E,E}(m, \mathcal{G})$. We can apply 4.9.1, thus we have

$$\mathcal{G}'\alpha \in \mathcal{G}'\beta \equiv \mathcal{G}'\alpha' \in \mathcal{G}'\beta' \quad \text{for every } \alpha, \beta \in m.$$

ξ being a common E -section of m and $\mathcal{G}$ similarly as in 4.10.1, we get $\alpha < \xi \equiv \alpha' < \xi$ and $\alpha < \xi \supset \alpha = \alpha'$.

But $\gamma \subseteq m$ and $\gamma \subseteq \omega_{\lambda+\nu+1}$, hence $\gamma \subseteq \xi$. It follows that

$$\mathcal{G}'\alpha \in \mathcal{G}'\delta \equiv \mathcal{G}'\alpha \in \mathcal{G}'\delta' \quad \text{for every } \alpha \in \gamma.$$

But $\mathcal{G}'\alpha = \mathcal{G}'_\xi\alpha$ for $\alpha < \xi < \omega_{\lambda+\nu+1}$ by 4.8.3, and therefore

$$\mathcal{G}'\alpha \in \mathcal{G}'\delta \equiv \mathcal{G}'\alpha \in \mathcal{G}'_\xi\delta' \quad \text{for every } \alpha < \gamma.$$

This means that $\mathfrak{G}'\delta, \mathfrak{G}''\gamma \subseteq \mathfrak{G}_\xi'\delta', \mathfrak{G}''\gamma$ and using $u \subseteq \mathfrak{G}''\gamma$ it follows that $u = \mathfrak{G}''\gamma, \mathfrak{G}_\xi'\delta'$. On the other hand, using again that $\mathfrak{G}'\alpha = \mathfrak{G}_\xi'\alpha$ for every $\alpha < \xi$, we have $\mathfrak{G}''\gamma = \mathfrak{G}_\xi''\gamma \subseteq \mathfrak{G}_\xi''\xi$ and $\xi \in \mathfrak{B}(J_0)$ implies $\mathfrak{G}_\xi''\xi = \mathfrak{G}_\xi'\xi$.

Thus $u = \mathfrak{G}_\xi'\xi, \mathfrak{G}_\xi'\delta'$.

But $\delta' \in \mathcal{P}$ and $\mathcal{P} = \bar{m} < \omega_{\lambda+r+1}$, hence $\delta' < \omega_{\lambda+r+1}$ and $\xi < \omega_{\lambda+r+1}$. It follows from 4.5.2 that $\mathfrak{D}\delta' u < \omega_{\lambda+r+1}$.

4.10.4. $\mathfrak{D}\delta' \mathfrak{G}_\xi'\alpha < \omega_{\lambda+r+2}$ for $\alpha, \xi < \omega_{\lambda+r+1}$.³⁵

PROOF. If for an α in question there exists a $\gamma < \omega_{\lambda+r+2}$ ($\gamma \in \mathfrak{B}(I_0)$) such that $\mathfrak{G}_\xi'\alpha \in \mathfrak{G}''\gamma$, then $\mathfrak{D}\delta' \mathfrak{G}_\xi'\alpha < \omega_{\lambda+r+2}$ by 4.10.1. Hence we have to prove that

(ξ) ($\alpha < \omega_{\lambda+r+1}, \xi < \omega_{\lambda+r+1} \supset (\exists \gamma)(\gamma < \omega_{\lambda+r+2}, \gamma \in \mathfrak{B}(J_0), \mathfrak{G}_\xi'\alpha \subseteq \mathfrak{G}''\gamma)$) holds.

This expression being normal we can apply induction on α .

Suppose that this is true for every $\beta < \alpha$ for an $\alpha < \omega_{\lambda+r+1}$. By 4.10.1 it follows that $\mathfrak{G}_\xi''\alpha \subseteq \mathfrak{G}''\omega_{\lambda+r+2}$. But then $\mathfrak{G}_\xi'\alpha \subseteq \mathfrak{G}''\omega_{\lambda+r+2}$ by 4.3.9.

Put $a = \mathfrak{G}_\xi'\alpha$. Then $\overline{\mathfrak{D}\delta' a} \subseteq \omega_{\lambda+r+2}$. But $a \subseteq \omega_{\lambda+r+1}$ by 4.5.4, hence, $\mathfrak{D}\delta$ being a function, $\overline{\mathfrak{D}\delta' a} \subseteq \omega_{\lambda+r+1}$. It follows from 2.1.10 and 4.1.8 that there exists a $\gamma < \omega_{\lambda+r+2}$ ($\gamma \in \mathfrak{B}(J_0)$) such that $\mathfrak{D}\delta' a \subseteq \gamma$. But then $G_\xi'\alpha \subseteq G''\gamma$ for this γ .

4.10.5. There exists an ordinal number π ($\pi < \omega_{\lambda+r+2}$) such that $\mathfrak{D}\delta' u < \pi$ for every u for which there exists a $\gamma < \omega_{\lambda+r+1}$, $u \subseteq \mathfrak{G}''\gamma$.

PROOF. We define a function T as follows:

$$T \upharpoonright \omega_{\lambda+r+1}^2. (\langle \xi \alpha \rangle \in \omega_{\lambda+r+1}^2 \supset T' \langle \xi \alpha \rangle = \mathfrak{D}\delta' \mathfrak{G}_\xi'(\alpha)).$$

The operations $X'Y$, $\mathfrak{D}\delta(U_1, U_2, Z)$, $\mathfrak{G}(U_1, U_2, Z)$ ³⁶ being normal, such a function exists by $M_0[1]$, since $\mathfrak{D}\delta' \mathfrak{G}_\xi'\alpha$ is a set for every ξ and α .

We define p as follows:

$u \in p \equiv (\exists \gamma)(\gamma < \omega_{\lambda+r+1}, u \subseteq \mathfrak{G}''\gamma)$. p exists by $M_1[1]$ and $p \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{G}''\omega_{\lambda+r+1})$ implies that p is a set.

Suppose $U \in p$. Then by 4.10.3 there exists a $\xi < \omega_{\lambda+r+1}$ such that $\mathfrak{D}\delta' u < \omega_{\lambda+r+1}$.

Put $\alpha = \mathfrak{D}\delta' u$. Then $u = \mathfrak{G}_\xi'\alpha$ where $\alpha, \xi < \omega_{\lambda+r+1}$, i. e. $\mathfrak{D}\delta' u \in \mathfrak{B}(T)$. But $\mathfrak{B}(T) \subseteq \omega_{\lambda+r+2}$ by 4.10.4 and $\mathfrak{B}(T) \subseteq \overline{\mathfrak{T}(T)} = \omega_{\lambda+r+1}^2 = \omega_{\lambda+r+1} < \omega_{\lambda+r+2}$ by [1], 8.62. Hence by 2.1.10 there exists a $\pi < \omega_{\lambda+r+2}$ such that $\mathfrak{B}(T) \subseteq \pi$. It follows that $\mathfrak{D}\delta' u < \pi$ for every $u \in p$.

³⁵ It is easy to see that 4.10.3 implies directly ($\rightarrow$), and therefore Lemma 4.10.4 is not essential. However, it seems to be more convenient to carry out the proof as we do it in the text.

³⁶ At this point we have to use essentially the normality of the operations $\mathfrak{D}\delta$ and $\mathfrak{G}$.

4.10.6. $(\varrho)(\varrho \leq \lambda + \nu \supset 2^{\aleph_{\varrho}} \leq \aleph_{\lambda + \nu + 1})$.

PROOF. Let τ be the ordinal number which satisfies the requirements of 4.10.5. Then $\bar{\tau} < \omega_{\lambda + \nu + 2}$, hence $\tau \leq \omega_{\lambda + \nu + 1}$. $\overline{G^{(\tau)}} = \aleph_{\varrho}$ by 4.5.6 and $2^{\aleph_{\varrho}} = \aleph^{(\tau)}(\aleph^{(\tau)}(\omega_{\varrho}))$ by 2.1.16. $\mathfrak{G}$ being a function, $\overline{G^{(\tau)}} \leq \aleph_{\lambda + \nu + 1}$, therefore it is sufficient to see that $\aleph^{(\tau)}(\omega_{\varrho}) \subseteq G^{(\tau)}\tau$, but ϱ being less than $\lambda + \nu + 1$, $\omega_{\varrho} = \gamma < \omega_{\lambda + \nu + 1}$ and the inclusion follows from 4.10.5.

4.10.7. $2^{\aleph_{\lambda + \nu}} = \aleph_{\lambda + \nu + 1}$.

PROOF. $2^{\aleph_{\lambda + \nu}} \geq \aleph_{\lambda + \nu + 1}$ by 2.1.15 and $2^{\aleph_{\lambda + \nu}} \leq \aleph_{\lambda + \nu + 1}$ by 4.10.6.

(— —) and (— — —) hold by 4.10.2, 4.10.6 and 4.10.7. Thus we have proved 4.7.9, consequently the proof of Theorem 1 is finished as well.

§ 5. Proof of Theorem 2. Corollaries

We are going to define some metaconcepts.

DEFINITION 5.1. The formula $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ of Σ^* is called to be *constructive* if we can prove in Σ^* that φ is absolute with respect to any model $\mathcal{M}$ satisfying Σ^* and determined by a complete and almost universal class M , i. e. φ is constructive if

$$\vdash (M) (\mathfrak{C}_{\text{omp}}(M), \mathfrak{A}_{\text{u}}(M), \psi_0^*(M) \supset (X_{1, M} \dots (X_{n, M})(\varphi(X_{1, M}, \dots, X_{n, M})) \equiv \varphi_M(X_{1, M} \dots X_{n, M}))).$$

DEFINITION 5.2. The particular class $\mathfrak{A}$ (of Σ^*) is called to be *absolutely definable* if

$$\vdash (M) (\mathfrak{C}_{\text{omp}}(M), \mathfrak{A}_{\text{u}}(M), \psi_0^*(M) \supset \mathfrak{A}_M = \mathfrak{A}).$$

DEFINITION 5.3. The particular ordinal number $\mathcal{A}$ is called to be *absolutely definable in the stronger sense* if it is *absolutely definable* (as a particular class)

DEFINITION 5.4. The particular ordinal number $\mathcal{A}$ is called to be *absolutely definable in the weaker sense* if

$$\vdash (M) (\mathfrak{C}_{\text{omp}}(M), \mathfrak{A}_{\text{u}}(M), \psi_0^*(M), (\alpha)(\alpha \leq \mathcal{A} + 1 \supset \aleph_M^{\alpha} = \aleph^{\alpha}), \supset \mathcal{A}_M = \mathcal{A}).$$

It is obvious that every particular ordinal number absolutely definable in the stronger sense is absolutely definable in the weaker sense. In § 6 we are going to prove theorems concerning absolutely definable ordinal numbers.

THEOREM 2. *Are the particular ordinal numbers $\mathcal{A}$ and $\aleph$ absolutely definable in the weaker sense, then the axiom system $\Sigma^*, F_{\mathcal{A}, \aleph}^*$ is consistent, provided that the same is true for the axiom system $\Sigma^*, F_{\mathcal{A}, \aleph}$.*

PROOF. In the axiom system Σ^* , $F_{A,N}$, $2^{s_A} \geq s_{A+1}$ is an axiom. Hence by Theorem 1 we can prove in Σ^* , $F_{A,N}$ the formula

$$\begin{aligned} & (\exists M) (\text{Comp}(M) \cdot \mathfrak{A}u(M) \cdot \psi_0^*(M) \cdot \\ & \cdot (\alpha) (\alpha \leq A + N + 1 \supset s_M' \alpha = s'(\alpha)) \cdot \\ (1) \quad & \cdot (\varrho) (A \leq \varrho < A + N + 1 \supset (2^{s_M \varrho})_M = s_M'(A + N + 1)) \cdot \\ & \cdot (\mu) (A + N \leq \mu \supset (2^{s_M \mu})_M = s_M'(\mu + 1)). \end{aligned}$$

Let now $\psi_0^{**}(M)$ denote the conjunction of the relativized of the axioms of Σ^* , $F_{A,N}^*$ with respect to A_M . A and N being absolutely definable in the weaker sense, A and N are absolute with respect to any A_M for which $\text{Comp}(M)$, $\mathfrak{A}u(M)$, $\psi_0^*(M)$, $(\alpha)(\alpha < A + N + 1 \supset s_M' \alpha = s'(\alpha))$, since $A + 1 \leq A + N + 1$, $N + 1 \leq A + N + 1$, and thus, taking into consideration the absoluteness of the concepts appearing without the subscript M , $(\varrho)(A \leq \varrho < A + N + 1 \supset (2^{s_M \varrho})_M = s_M'(A + N + 1))$, $(\mu)(A + N \leq \mu \supset (2^{s_M \mu})_M = s_M'(\mu + 1))$ is just the relativized of $F_{A,N}^*$. It follows that the theorem $(\exists M) \psi_0^{**}(M)$ is provable in Σ^* , $F_{A,N}$.

Suppose now that a contradiction is derived in Σ^* , $F_{A,N}^*$, i. e. we have in Σ^* , $F_{A,N}^*$ a proof for a closed formula Θ and for its negation $\sim \Theta$ as well. Then we can construct by M_0 from these proofs the proofs of the formulas

$$(M) (\psi_0^{**}(M) \supset \Theta_M) \quad \text{and} \quad (M) (\psi_0^{**}(M) \supset \sim \Theta_M)$$

in Σ^* , $F_{A,N}$, respectively, i. e. we can construct from these proofs the proof of $(M) (\sim \psi_0^{**}(M))$ in Σ^* , $F_{A,N}$ which is just the negation of $(\exists M) \psi_0^{**}(M)$. Q. e. d.

Applying Theorem 2 to $N=1$ we obtain the following corollary:

K₁. *If A is absolutely definable in the weaker sense and $2^{s_A} = s_{A+1}$ cannot be proved in Σ^* , then it cannot be proved in Σ^* even if we assume that $2^{s_\mu} = s_{\mu+1}$ for every μ greater than A .*

PROOF. $2^{s_A} \neq s_{A+1} \equiv 2^{s_A} \geq s_{A+1+1} = s_{A+2}$.

Hence if $2^{s_A} = s_{A+1}$ cannot be proved in Σ^* , then the axiom system Σ^* , $F_{A,1}$ must be consistent. It follows by Theorem 2 that the axiom system Σ^* , $F_{A,1}^*$ is consistent as well. But this means that the axioms Σ^* , $2^{s_A} = s_{A+2}$, $(\mu)(A < \mu \supset 2^{s_\mu} = s_{\mu+1})$ are consistent, hence one cannot derive $2^{s_A} \neq s_{A+2}$ from the axioms of Σ^* and $(\mu)(A < \mu \supset 2^{s_\mu} = s_{\mu+1})$.

It is obvious from the proof of Theorem 2 that from any proof of the theorem $2^{s_A} = s_{A+1}$ given in Σ^* , $(\mu)(A < \mu \supset 2^{s_\mu} = s_{\mu+1})$ we can construct a proof of the formula $2^{s_A} = s_{A+1}$ in Σ^* .

A similar remark is valid for the other corollaries the proof of which we are going only to sketch.

$\mathbf{K}_2. \vdash 2^{\aleph_A} = \aleph_{A+1}$ if (and only if) $\vdash 2^{\aleph_A} \neq \aleph_{A+2}$.

$\mathbf{K}_3. \vdash 2^{\aleph_A} = \aleph_{A+1}$ if (and only if) $\vdash 2^{\aleph_A} \neq 2^{\aleph_{A+1}}$, provided that A is absolutely definable in the weaker sense.

The corollary $\mathbf{K}_3$ has the following interesting consequence:

It was well known that the hypothesis $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$, called Lusin hypothesis, contradicts Cantor's continuum hypothesis. But $\mathbf{K}_3$ says for $A=0$ that a disproof of the Lusin hypothesis would give a proof of the continuum hypothesis.

The corollaries $\mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3$ are immediate consequences of the following more general theorems $\mathbf{K}_4, \mathbf{K}_5$ if we take into consideration that

$$2^{\aleph_A} < \aleph_{A+2} \equiv 2^{\aleph_A} = \aleph_{A+1}:$$

$\mathbf{K}_4. \vdash 2^{\aleph_A} < \aleph_{A+N+1}$ if (and only if) $\vdash 2^{\aleph_A} \neq \aleph_{A+N+1}$.

$\mathbf{K}_5. \vdash 2^{\aleph_A} < \aleph_{A+N+1}$ if (and only if) $\vdash 2^{\aleph_A} \neq 2^{\aleph_{A+N}}$, provided that A and N are absolutely definable in the weaker sense.

PROOF. The "only if" is trivial in both cases.

Suppose that one of the formulas $2^{\aleph_A} \neq \aleph_{A+N+1}$, $2^{\aleph_A} \neq 2^{\aleph_{A+N}}$ is proved in Σ^* . This means that the axiom system $\Sigma^*, F_{A,N}$ is proved to be inconsistent. Then by Theorem 2 we can derive a contradiction in $\Sigma^*, F_{A,N}$, too, i. e. we have a proof of $2^{\aleph_A} < \aleph_{A+N+1}$ in Σ^* .

REMARK.³⁷ There is a well-known theorem of the set theory which asserts that $2^{\aleph_A} \neq \aleph_{A+M}$ if $cf(A+M) \leq cf(A)$, since in this case $\aleph_{A+M}^{2^{\aleph_A}} > \aleph_{A+M}$.³⁸ For example, $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$. If our theorems were valid for arbitrary $M \geq 1$ instead of $N+1$, corollary $\mathbf{K}_4$ would imply, for example, $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$. Naturally this is not the case. However, if M is of the second kind but $cf(A+M) > cf(A)$, then the equality $2^{\aleph_A} = \aleph_{A+M}$ is not disproved. For example, $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$ can be consistent with the axioms of Σ^* , but we can prove neither Theorem 2 nor corollary $\mathbf{K}_4$ for this case, for we can not prove the theorem corresponding to 4.8.8 in this case.

We mention here that there is a conjecture that the continuum hypothesis is independent of the axiom system Σ^* in such a manner that $2^{\aleph_A}$ cannot be limited from above in a non-trivial way. Anyway our result shows in accordance with this conjecture why non-trivial inequalities of the form $2^{\aleph_A} \neq 2^{\aleph_{A+N}}$, $2^{\aleph_A} \neq \aleph_{A+N+1}$ are not proved in the set theory.

We mention another group of corollaries of Theorem 1.

³⁷ In this remark we use set-theoretical concepts not defined in this paper. For the definition of $cf(a)$ see e. g. [4].

³⁸ See e. g. TARSKI's paper [4].

Let $\varphi(X)$ and $\psi(X)$ be constructive formulas. Then

K_6 . $\vdash (\alpha)(\beta)(\varphi(\alpha). \psi(\beta) \supset 2^{\aleph_\alpha} < \aleph_{\alpha+\beta+1})$ if (and only if)
 $\vdash (\alpha)(\beta)(\varphi(\alpha). \psi(\beta) \supset 2^{\aleph_\alpha} \neq \aleph_{\alpha+\beta+1})$.

K_7 . $\vdash (\alpha)(\beta)(\varphi(\alpha). \psi(\beta) \supset 2^{\aleph_\alpha} < \aleph_{\alpha+\beta+1})$ if (and only if)
 $\vdash (\alpha)(\beta)(\varphi(\alpha). \psi(\beta) \supset 2^{\aleph_\alpha} \neq 2^{\aleph_{\alpha+\beta}})$.

The proof of these theorems is to be obtained from Theorem 1 quite similarly to the proof of Theorem 2.

The identically true formulas (e. g. $X=X$) being constructive we obtain immediately the following consequences (writing $\beta=1$):

K_8 . $\vdash (\alpha)(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$ if (and only if) $\vdash (\alpha)(2^{\aleph_\alpha} \neq \aleph_{\alpha+2})$.

K_9 . $\vdash (\alpha)(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$ if (and only if) $\vdash (\alpha)(2^{\aleph_\alpha} \neq 2^{\aleph_{\alpha+1}})$.

Finally, we mention that applying Theorem 2 to $A=0$, $N=0$ we obtain the result that if the axiom system Σ^* is consistent, then the axiom system Σ^* , $(\alpha)(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$ is consistent as well, since axiom $F_{0,0} = 2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$ is a theorem of Σ^* . This special case is weaker than GÖDEL's result for the continuum hypothesis, since he reduces the consistency of Σ^* $(\alpha)(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$ to the consistency of Σ , but the model, constructed in Σ^* for our purposes, has the interesting property that $\aleph_1$ is absolute with respect to this model.

§ 6. Supplement

We make the following conventions. Every metaconcept the definition of which depends on the axiom system is to be regarded as a metaconcept of Σ^* .

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$ denote particular classes. An arbitrary concept is briefly said absolute if it is absolute with respect to any model $\mathcal{A}_M$ satisfying the axiom system Σ^* and determined by a complete and almost universal class M .

6.1. In this section we deal with a characterization of the absolutely definable particular classes.

Let $\mathcal{A}_M$ be a model determined by a class M .

We are going to define the metaconcepts

"to be a formula of $\mathcal{A}_M$ " and

"to be a concept of $\mathcal{A}_M$ ".

These concepts are to be defined "relativizing" the common recursive definition of the formulas and concepts as follows:

$$\mathfrak{C}\mathfrak{I}\mathfrak{s}(X, M), \quad \mathfrak{M}(X, M), \quad \mathfrak{C}(X, Y, M)$$

are notions of the model $\mathcal{A}_M$ (for fixed M).

Let $\bar{X}, \bar{Y}, \dots$ and $\bar{x}, y, \dots$ denote the M -class and M -set variables, respectively. $\bar{X}, \bar{Y}, \dots$ and $\bar{x}, \bar{y}, \dots$ are variables of the model $\mathcal{A}_M$.

Generally, if $\mathfrak{B}(X, M)$ is a notion of $\mathcal{A}_M$, the variable Γ defined by the stipulations

$$(\Gamma)\varphi(\Gamma) \equiv (X)(\mathfrak{B}(X, M) \supset \varphi(X)),$$

$$(\exists \Gamma)\varphi(\Gamma) \equiv (\exists X)(\mathfrak{B}(X, M) \cdot \varphi(X))$$

is a variable of the model $\mathcal{A}_M$.

The formula $\varphi(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n, M)$ is called to be a formula of $\mathcal{A}_M$ if every concept contained in it is a concept of $\mathcal{A}_M$.

The notion $\mathfrak{B}(X_1, \dots, X_n, M)$ is called to be a notion of $\mathcal{A}_M$ if it is introduced by the stipulations:

$$\mathfrak{B}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, M) \equiv \varphi(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, M)$$

where $\varphi(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, M)$ is a formula of $\mathcal{A}_M$ and $\mathfrak{B}(X_1, \dots, X_n, M)$ is false for every $X_1, \dots, X_n$ if one of the classes $X_1, \dots, X_n$ is not an M class.

The operation $\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n, M)$ is called to be an operation of $\mathcal{A}_M$ if it is defined by the following stipulations:

$\varphi(\bar{Y}, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, M)$ is a formula of $\mathcal{A}_M$ for which

$$\vdash (X_1) \dots (\bar{X}_n) (\exists! Y) \varphi(\bar{Y}, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, M) \text{ and } \varphi(\mathfrak{A}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, M), \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, M)$$

and $\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n, M) = 0$ if one of the classes $X_1, \dots, X_n$ is not an M -class.

Finally, the particular class $\mathfrak{A}$ is called to be a particular class of $\mathcal{A}_M$ if it is defined by $\varphi(\mathfrak{A}, M)$ where $\varphi(\bar{X}, M)$ is a formula of $\mathcal{A}_M$ and $\vdash (\exists! X) \varphi(\bar{X}, M)$.

The following facts are easy to see:

(1) The relativized of a formula or a concept with respect to $\mathcal{A}_M$ is a formula or a concept of $\mathcal{A}_M$, respectively.

(2) If $\mathcal{A}_M$ satisfies the axiom system Σ^* and a metatheorem like M_1 [1], for example, is proved from the axioms of Σ^* , for a certain kind of formulas, then the relativized metatheorem is valid for the "relativized kind" of the formulas of $\mathcal{A}_M$.

In what follows L, F denote the classes defined in [1], 9.3, 9.4, respectively, and $\mathcal{A}_L$ is denoted by $\mathcal{A}$ as in [1]. We prove the following metatheorem:

C₁. The special class $\mathfrak{A}$ is absolutely definable in the stronger sense if and only if it is a special class of the model $\mathcal{A}$.

PROOF. The class L being complete and almost universal by [1], 9.51, 9.63, the class $\mathfrak{A}$ (if absolutely definable) is absolute with respect to $\mathcal{A}$. This means that $\mathfrak{A}_L = \mathfrak{A}$, hence $\mathfrak{A}$ is a special class of $\mathcal{A}$ by (1).

Suppose now that $\mathfrak{A}$ is a special class of $\mathcal{A}$.

This means that the defining postulate $\varphi(X)$ of $\mathfrak{A}$ is such that $\varphi(\bar{X})$ is a formula of $\mathcal{A}$. On the other hand, it is easy to see that every formula of Σ^* is equivalent to a formula not containing other concepts than class variables and the notion $X \in Y$. Hence by (2) we may suppose that $\varphi(\bar{X})$ contains only L -class variables and the only notion $\mathfrak{E}(X, Y, L)$.

Therefore it is enough to prove that the notion $\mathfrak{E}(X, Y, L)$ and the L -class variables $\bar{X}, \bar{Y}, \dots$ are absolute.

Let now M be an arbitrary complete and almost universal class for which $\psi_0^*(M)$ holds. Let $X_M, Y_M, \dots$ and $x_M, y_M, \dots$ denote the class and set variables of the model $\mathcal{A}_M$, respectively.

First we prove that $\mathfrak{E}_L(X, L)$ is absolute with respect to $\mathcal{A}_M$.

$$\mathfrak{E}_L(X_M) \equiv X_M \subseteq L.(u)(u \in L \supset u.X_M \in L)$$

by the definition 2.2.1 of $\mathfrak{E}_L(X)$. Using that the notions $X \in Y$, $X \subseteq Y$, the operation $X.Y$ and the special class L are absolute by 2.2.5 and 2.2.7, the relativized of $\mathfrak{E}_L(X_M)$ is the following:

$$(\mathfrak{E}_L(X_M))_M \equiv X_M \subseteq L.(u_M)(u_M \in L \supset u_M.X_M \in L).$$

We have to prove that $\mathfrak{E}_L(X_M) \equiv (\mathfrak{E}_L(X_M))_M$ for every X_M .

u_M being always a set, $\mathfrak{E}_L(X_M)$ implies obviously $(\mathfrak{E}_L(X_M))_M$. Suppose now that $(\mathfrak{E}_L(X_M))_M$ holds. Then $X_M \subseteq L$, and therefore it is enough to see that the implication $u \in L \supset u.X_M \in L$ holds for every set u . It holds for every $u \in M$ by the assumption $(\mathfrak{E}_L(X_M))_M$. On the other hand, L is absolute with respect to $\mathcal{A}_M$ by 2.2.7, hence, M being complete, $L \subseteq M$. It follows that if $u \notin M$, then $u \notin L$ and in this case the implication holds vacuously.

Thus $\mathfrak{E}_L(X)$ is proved to be absolute.

Now we can prove that $X \in_L Y$ is absolute. By 2.2.3 $X \in_L Y \equiv X \in Y. \mathfrak{E}_L(Y).X \in L$. But $X \in Y$ and L are absolute by 2.2.7, and we have just proved the absoluteness of $\mathfrak{E}_L(X)$. Hence $X \in_L Y$ is absolute. It remains to prove that the L -class variables $\bar{X}, \bar{Y}$ are absolute, i. e. $\mathfrak{E}_L(X) \equiv (\mathfrak{E}_L(X))_M$ for every class X . $\mathfrak{E}_L(X)$ being absolute, this holds for every X which is an M -class. If X is not an M -class, then the right-hand side is obviously false. Therefore we have to prove that if X is not an M -class, then it can not be an L -class, i. e.

$$\mathfrak{E}_L(X) \supset \mathfrak{E}_M(X),$$

$$\mathfrak{E}_L(X) \equiv X \subseteq L.(u)(u \in L \supset u.X \in L),$$

$$\mathfrak{E}_M(X) \equiv X \subseteq M.(u)(u \in M \supset u.X \in M).$$

Suppose now that $\mathfrak{E}_L(X)$ holds. As we have already seen, $L \subset M$, hence $X \subseteq M$. It remains to prove that $u.X \in M$ holds for every $u \in M$. Sup-

pose $u \in M$. Then $u.X \subseteq X$, hence, X being an L -class, $u.X \subseteq L$. $u.X$ is a set, and therefore, L being almost universal, there exists a $v \in L$ such that $u.X \subseteq v$. We have $u.X = u.(X.v)$. X being an L -class, $X.v$ is an L -set, hence it is an M -set too. It follows that $u.X$, being the intersection of two M -sets, is an M -set too.

Thus the absoluteness of $\bar{X}, \bar{Y}, \dots$ is proved.

As an immediate corollary of $\mathbf{C}_1$ we get the following characterization of the particular ordinal numbers absolutely definable in the stronger sense:

$\mathbf{C}_2$. *The particular ordinal number 1 is absolutely definable in the stronger sense if and only if it is a particular ordinal number of $\mathcal{A}$.*

$\mathbf{C}_2$ follows from $\mathbf{C}_1$ taking into consideration that $\mathfrak{D}(X)$ is absolute by 2.2.7.

6.2. In this section we outline the proof of the fact that the constructive ordinal numbers of CHURCH—KLEENE are absolutely definable in the stronger sense. We have to define the axiomatic notion of a recursive ordinal number. It is obvious that for our purposes the definition of a metaconcept will be necessary.

We are going to define the metaconcept of a constructive particular ordinal number.

First we need some preliminary results.

We make the following convention: $\mathfrak{f}(n_1 \dots n_k), \mathfrak{g}(n_1 \dots n_k)$ denote such operations for which $\mathfrak{f}(n_1, \dots, n_k), \mathfrak{g}(n_1 \dots n_k), \dots$ are integers for every $n_1, \dots, n_k$ if $n_1, \dots, n_k$ are integers and $\mathfrak{f}(X_1, \dots, X_n) = 0, \mathfrak{g}(X_1, \dots, X_n) = 0$ if some of the classes $X_1, \dots, X_n$ is not an integer.

6.2.1. Are the operations $\mathfrak{g}(n_1, \dots, n_m), \mathfrak{h}_1(n_1, \dots, n_k), \dots, \mathfrak{h}_m(n_1, \dots, n_k)$ normal, then there exists exactly one normal operation $\mathfrak{f}(n_1, \dots, n_k)$ satisfying

$$(I) \quad \mathfrak{f}(n_1, \dots, n_k) = \mathfrak{g}(\mathfrak{h}_1(n_1, \dots, n_k), \dots, \mathfrak{h}_m(n_1, \dots, n_k)).$$

6.2.2. Are the operations $\mathfrak{g}(n_2, \dots, n_k), \mathfrak{h}(n_1, n'_1, n_2, \dots, n_k)$ normal, then there exists exactly one normal operation $\mathfrak{f}(n_1, \dots, n_k)$ satisfying

$$(II) \quad \begin{aligned} \mathfrak{f}(0, n_2, \dots, n_k) &= \mathfrak{g}(n_2, \dots, n_k), \\ \mathfrak{f}(n_1 + 1, n_2, \dots, n_k) &= \mathfrak{h}(n_1, \mathfrak{f}(n_1, n_2, \dots, n_k), n_2, \dots, n_k). \end{aligned}$$

The proofs can be carried out without difficulty (in case of 6.2.2 using $\mathbf{M}_8$) thus we omit them.

The following formulas define normal operations:

6.2.3. DEF. $s(n) = n + 1, c(n) = 0, u_k^i(n_1, \dots, n_k) = n_i \ (1 \leq i \leq k)$.

6.2.4. DEF. The operation $\mathfrak{f}(n_1, \dots, n_k)$ is called to be a *primitive re-*

cursive operation if it can be obtained from the operations defined in 6.2.3 by the successive applications of (I) and (II).

It follows easily from the definition:

6.2.5. Every primitive recursive operation is a normal operation.

We define the metaconcept of a general recursive operation using the characterization of general recursive functions given by KLEENE.

6.2.6. DEF. The operation $\hat{f}(n_1, \dots, n_k)$ is called to be a *general recursive operation* if there exist primitive recursive operations $g(m)$, $h(n_1, \dots, n_k, n)$ for which

$$\begin{aligned} (1) \quad & (\exists n)(h(n_1, \dots, n_k, n) = 0), \\ (2) \quad & (h(n_1, \dots, n_k, n) = 0 \cdot (m) (m < n \supset h(n_1, \dots, n_k, n) \neq 0)) \supset \\ & \supset \hat{f}(n_1, \dots, n_k) = g(n). \end{aligned}$$

We have

6.2.7. If the operations $g(m)$ and $h(n_1, \dots, n_k, n)$ are primitive recursive and $h(n_1, \dots, n_k, n)$ satisfies (1), then there exists exactly one normal operation which satisfies (2).

PROOF. Taking into consideration the convention made on p. 371. the formula

$$\begin{aligned} u \in \hat{f}(n_1, \dots, n_k) \equiv & (\exists n)(u \in g(n) \cdot h(n_1, \dots, n_k, n) = 0. \\ & \cdot (m)(m < n \supset h(n_1, \dots, n_k, n) \neq 0)) \end{aligned}$$

defines a normal operation which satisfies (2).

As a consequence of 6.2.6 and 6.2.7 we have

6.2.8. Every general recursive operation is normal.

6.2.9. DEF. The particular class $\mathfrak{A}$ is said to be a *recursively enumerable relation* if there exists a general recursive operation $\hat{f}(k, m, n)$ for which

$$(3) \quad (k)(m)(\langle km \rangle \in \mathfrak{A} \equiv (\exists n)(\hat{f}(k, m, n) = 0)). \mathfrak{A} \subseteq \omega^2.$$

It results from 6.2.8 by M_1 [1]:

6.2.10. Corresponding to every general recursive operation $\hat{f}(k, m, n)$ there exists exactly one special class $\mathfrak{A}$ satisfying (3).

We define the metaconcept of a recursive ordinal number using the characterization of CHURCH—KLEENE's recursive ordinal numbers given by MARKVALD [5].

6.2.11. DEF. The particular ordinal number $\mathcal{A}$ is said to be a *recursive ordinal number* if there exists a recursively enumerable relation $\mathfrak{A}$ for which

$$\vdash (\exists X)(X \text{ is } \text{isom}_{\mathfrak{A}, E}(\omega, \mathcal{A})).$$

Now using the metatheorems $AB_1, \dots, AB_6$ and theorems 2.2.5—2.2.7 it offers no difficulty to prove step by step that every primitive recursive operation, general recursive operation, recursively enumerable relation are absolute, so we get the metatheorem:

C₃. *Every recursive ordinal number is absolutely definable in the stronger sense.*

It is obvious that in the same way one can prove for more general kind of special ordinal numbers A that A is absolutely definable. However, the theorems proved so far assure only the existence of denumerable absolutely definable ordinal numbers (in the stronger sense).

6.3. In this section we are going to prove a metatheorem which assures the existence of non-denumerable ordinal numbers absolutely definable in the weaker sense.

C₄. *If A_1 is an absolutely definable ordinal number in the weaker sense, then the same is true for $\aleph_{A_1} = A$.*

PROOF. We have to prove that A is absolute with respect to every model A_M determined by a complete and almost universal class M satisfying $\psi_0^*(M)$, and

$$(x) \quad (a) (a \leq A + 1 \supset \aleph_M^a a = \aleph^a a).$$

Let M be a class satisfying the above conditions. $A_M = \aleph_M^{A_1} A_{1M}$, since $X \nabla Y$ is absolute. (x) implies (a) $(a \leq A_1 + 1 \supset \aleph_M^a a = \aleph^a a)$, since $A_1 \leq A$. Thus A_1 is absolute with respect to A_M — since it is absolutely definable in the weaker sense — that means $A_{1M} = A_1$.

Applying (x) to $A_1 = a$ we get $A_M = \aleph_M^{A_1} A_1 = \aleph^{A_1} A_1 = A$. Q. e. d.

*

The following indices are to be considered as the continuations of the corresponding ones of [1]:

Normal concepts

$$\begin{aligned} 2.1.4 \quad Z \in X \dot{+} Y &\equiv (\exists a)(\exists \beta)(X = a. Y = \beta. Z \notin \aleph^a(\beta)) : \\ &\sim (\exists a)(\exists \beta)(X = a. Y = \beta). Z \in X \dot{+} 1 \end{aligned}$$

$$2.1.11 \quad \mathfrak{C}los_2(X, Y) \equiv X^{(1)} Y \subseteq Y; \quad \mathfrak{C}los_3(X, Y) \equiv X^{(1)} Y^2 \subset Y$$

$$2.1.14 \quad Z \in 2^X \equiv Z \in \mathfrak{P}(X)$$

$$2.2.1 \quad \mathfrak{C}ls(X, M) \equiv X \subseteq M. (u)(u \in M \supset u. X \in M)$$

$$2.2.2 \quad \mathfrak{M}(X, M) \equiv X \in M$$

$$2.2.3 \quad \mathfrak{C}(X, Y, M) \equiv \mathfrak{M}(X, M). \mathfrak{C}ls(Y, M). X \in Y$$

- 3.1 $\mathfrak{Au}(X) \equiv (u)(u \subseteq X \supset (\exists v)(v \in X. u \subseteq v))$
- 3.2 $\mathfrak{Fcl}(X) \equiv (u)(v)(u \in X. v \in X \supset \mathfrak{F}_1(u, v) \in X. \dots. \mathfrak{F}_8(u, v) \in X)$
- 4.3.1 $U \in \mathfrak{g}_i(X, Y, U_1, U_2, Z) \equiv \mathfrak{D}(Z). U \in \mathfrak{F}_i(X, Y) \text{ for } i=1, \dots, 8$
 $U \in \mathfrak{g}_9(X, Y, U_1, U_2, Z) \equiv \mathfrak{D}(Z). U \in X. On$
 $U \in \mathfrak{g}_{10}(X, Y, U_1, U_2, Z) \equiv \mathfrak{D}(Z). U \in (X. U_1^{\langle} Y)$
 $U \in \mathfrak{g}_{11}(X, Y, U_1, U_2, Z) \equiv \mathfrak{D}(Z). U \in (X. U_2^{\langle} Y)$
- 4.3.3 $U \in \mathfrak{G}_i(X, Y, U_1, U_2, Z) \equiv \mathfrak{D}(Z). U \in \mathfrak{F}_i(X, Y) \text{ for } i=1, \dots, 8$
 $U \in \mathfrak{G}_9(X, Y, U_1, U_2, Z) \equiv U \in O$
 $U \in \mathfrak{G}_{10}(X, Y, U_1, U_2, Z) \equiv \mathfrak{D}(Z). U \in X. U_1. \mathfrak{B}(\mathfrak{g}(U_1, U_2, Z))$
 $U \in \mathfrak{G}_{11}(X, Y, U_1, U_2, Z) \equiv \mathfrak{D}(Z). U \in X. U_2. \mathfrak{B}(\mathfrak{g}(U_1, U_2, Z))$
- 4.3.5 $U \in \mathfrak{M}(U_1, U_2, Z) \equiv \mathfrak{D}(Z). U \in \mathfrak{B}(\mathfrak{G}(U_1, U_2, Z))$
- 4.3.6 $U \in \mathfrak{Dd}(U_1, U_2, Z) \equiv \mathfrak{D}(Z). ((\exists x)(\exists y)(U = \langle yx \rangle. \langle xy \rangle \in$
 $\in \mathfrak{G}(U_1, U_2, Z). (z)(z \in y \supset \sim \langle xz \rangle \in \mathfrak{G}(U_1, U_2, Z)))$
- 4.3.12 $U \in \mathfrak{As}(U_1, U_2, Z) \equiv \mathfrak{D}(Z). ((\exists x)(\exists y)(U = \langle yx \rangle. y \in x. x \in$
 $\in \mathfrak{M}(U_1, U_2, Z). (z)(\mathfrak{Dd}(U_1, U_2, Z)^{\langle} z < \mathfrak{Dd}(U_1, U_2, Z)^{\langle} y \supset \sim z \in x)))$
- 4.3.18 $U \in \mathfrak{G}(U_1, U_2, Z) \equiv \mathfrak{D}(Z).$
 $(U \in \mathfrak{Dd}(U_1, U_2, Z) | (\mathfrak{As}(U_1, U_2, Z) | \mathfrak{G}(U_1, U_2, Z)))$
- 4.6.1 $\mathfrak{h}(U_1, X, Y) \equiv U_1 \mathfrak{F}n_{\omega_{X+Y+1}}. \mathfrak{Un}_2(U_1). \mathfrak{B}(U_1) \subseteq \mathfrak{P}(\omega_X)$
- 4.6.4 $\mathfrak{f}(U_2, X, Y) \equiv U_2 \mathfrak{F}n_{\omega_{X+Y+1}}. ((\alpha)(\alpha \in \omega_{X+Y+1} \supset$
 $\supset \mathfrak{T}(U_2^{\langle} \alpha) = \alpha. \mathfrak{B}(U_2^{\langle} \alpha) = \bar{\alpha}. \mathfrak{Un}_2(U_2^{\langle} \alpha). \mathfrak{Rel}(U_2^{\langle} \alpha)))$
- 4.8.1 $\mathfrak{Cl}\mathfrak{o}\mathfrak{s}(X)_{\xi} \equiv \mathfrak{Cl}\mathfrak{o}\mathfrak{s}_2(X, \mathfrak{C}_{\xi}). \mathfrak{Cl}\mathfrak{o}\mathfrak{s}_2(X, K_1). \mathfrak{Cl}\mathfrak{o}\mathfrak{s}_2(X, K_2).$
 $\mathfrak{Cl}\mathfrak{o}\mathfrak{s}_3(X, I_0). \dots \mathfrak{Cl}\mathfrak{o}\mathfrak{s}_3(X, I_{11})$
- 4.8.2 $Z \in [X]_{\xi} \equiv Z \in [X]_{(\mathfrak{C}_{\xi} K_1, K_2)(I_0, \dots, I_{11})}$

Special symbols

- 2.1.4 $X \dot{+} Y$
- 2.1.13 $[X]_{(R_1 \dots R_l)(S_1 \dots S_j)}$
- 2.1.14 2^X
- 4.8.2 $[X]_{\xi}$

Letters and combinations of letters

p. 323	$\mathcal{A}_M$		
2. 1. 3	$\mathfrak{N}(X)$		
2. 1. 11	$\mathfrak{G}\mathfrak{I}\mathfrak{O}\mathfrak{S}_2(A, R), \mathfrak{G}\mathfrak{I}\mathfrak{O}\mathfrak{S}_3(A, R)$		
2. 2. 1	$\mathfrak{G}\mathfrak{I}\mathfrak{S}(X, M)$		
2. 2. 2	$\mathfrak{M}(X, M)$		
2. 2. 3	$\mathfrak{E}(X, Y, M)$		
3. 1	$\mathfrak{A}\mathfrak{U}(X)$		
3. 2	$\mathfrak{F}\mathfrak{C}\mathfrak{I}(X)$		
p. 331	$\psi_0(X)$		
p. 331	$\psi_0^*(X)$		
4. 1. 1	S	[1], 9. 2	Note that these letters have somewhat different meaning as in [1].
4. 1. 2	J	[1], 9. 21	
4. 1. 3	$J_0, \dots, J_{11}$	[1], 9. 22	
4. 1. 5	K_1, K_2	[1], 9. 24	
4. 3. 1	$\mathfrak{g}_i(X, Y, U_1, U_2, Z)$ ($i=1, \dots, 11$)		Note that for the abbreviations of these operations different conventions are introduced. The first abbreviation is introduced on p. 345, in footnote 24, is valid in Sections 4. 3, 4. 4, 4. 5. The second one is introduced on p. 353 and is used in Sections 4. 6 and 4. 7. Finally, the third one is introduced on p. 357 and is used in Sections 4. 8, 4. 9, 4. 10.
4. 3. 2	$\mathfrak{g}(U_1, U_2, Z)$		
4. 3. 3	$\mathfrak{G}_i(X, Y, U_1, U_2, Z)$ ($i=1, \dots, 11$)		
4. 3. 4	$\mathfrak{G}(U_1, U_2, Z)$		
4. 3. 5	$\mathfrak{M}(U_1, U_2, Z)$		
4. 3. 6	$\mathfrak{D}\mathfrak{b}(U_1, U_2, Z)$		
4. 3. 12	$\mathfrak{A}\mathfrak{S}(U_1, U_2, Z)$		
4. 3. 18	$\mathfrak{C}(U_1, U_2, Z)$		
4. 6. 1	$\mathfrak{h}(U_1, X, Y)$		Note that the letters h, k are used in 4. 8, 4. 9, 4. 10 in another sense, and if there is no danger of misunderstanding, k appears as an integer variable too.
p. 352	h		
4. 6. 4	$\mathfrak{f}(U_2, X, Y)$		
p. 353	k		

Technical terms

- p. 321 particular ordinal number
- p. 323 model determined by the class M
- 3.1 almost universal
- 4.3.6 U_1, U_2, ξ -order of a set
- 4.8.1 ξ -closed (closed)
- 4.8.2 ξ -closure
- 5.1 constructive formula
- 5.2 absolutely definable particular class
- 5.3 absolutely definable particular ordinal number in the stronger sense
- 5.4 absolutely definable particular ordinal number in the weaker sense
- 6.2.4 primitive recursive operation
- 6.2.6 general recursive operation
- 6.2.9 recursively enumerable relation
- 6.2.11 recursive ordinal number

(Note that the word absolute is used for the abbreviation of different expressions of the form "absolute with respect to..." by the conventions made in the text.)

(Received 20 April 1960)

References

- [1] K. GÖDEL, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Annals of Mathematics studies, No. 3 (Princeton, 1940).
- [2] I. C. SHEPHERDSON, Inner models for set theory. I, *Journal of Symbolic Logic*, **16** (1951), pp. 161—190.
- [3] А. С. Есенин - Вольпин, Недоказуемость гипотезы Суслина без помощи аксиома выбора в системе Бернайса—Мостовского, ДАН СССР, **96** (1954), pp. 9—13.
- [4] A. TARSKI, Quelques théorèmes sur les alephs, *Fund. Math.*, **7** (1927), pp. 1—14.
- [5] W. MARKWALD, Zur Theorie der konstruktiven Wohlordnungen, *Math. Annalen*, **127** (1954), pp. 135—149.

ON GRAPHS IN WHICH TWO VERTICES ARE DISTINGUISHED

By

A. ÁDÁM (Szeged)

(Presented by L. KALMÁR)

Introduction

At this moment it is elaborated no satisfactorily comprehensive mathematical theory in order to elucidate the questions of the analysis and synthesis of relay-contact networks. Although there appear papers frequently which investigate problems belonging to this field, it seems that the development leading to a complete theory requires yet much of labor. (The various minimization questions are accessible very difficultly by exact methods which are of sufficiently constructive nature.)

The problems of this character fall to the boundaries of the mathematical logic (especially the theory of truth functions) and the theory of graphs.¹ The publications mostly omit the application of the graph theory and consider only certain truth-functional formulae. This one-sidedness seems to be disadvantageous, we remind the reader of the similar opinion of Z. PAWLAK (see [7]). In order to demonstrate the success of this view we mention the paper [12] of B. TRACHTENBROT in which the connection of the graph-theoretical and truth-functional aspects leads to important results.²

The problems of this field require to use jointly the logic and the theory of graphs. However, there seem to be useful the purely graph-theoretical preparatory investigations. The present article gives some theorems of this nature: it contains certain structural results on graphs considered from the point of view how they connect two distinguished vertices. The investigations described here were published in Hungarian language in the papers [1], [2], [4]. Although the subject is essentially the same, the presentation of the matter has many differences from the Hungarian publications. These differences follow from two motives. Firstly, the relative perfectness of the matter makes possible to give a more conscious ordering of the results contrarily to the particular publications. Secondly, I rely here rather on the results of TRACHTENBROT [12].

¹ See e. g. [12] or [3] concerning boundary problems of what character can arise.

² His former paper [11] contains a part of the results of [12] in more concise form and without proofs.

The paper consists of three chapters. Chapter I gives the introduction of the most general concepts. Chapter II discusses especially the questions of the series and parallel decomposition, its main result (Theorem 3) gives equivalent conditions for a 2-graph not to be decomposable into single edges.³

Chapter III is devoted to the structural analysis of a class of 2-graphs. Since the paper [12] of TRACHTENBROT describes the decomposition of the 2-graphs into irreducible ones, the question of studying the 2-graphs structurally can be restricted by requiring the irreducibility. ("Irreducible" is meant in the sense of TRACHTENBROT, cf. Footnote ¹¹.) § 5 characterizes the class of 2-graphs investigated and defines certain subgraphs in a graph belonging to this class. These subgraphs are: the 2-graph denoted by $\mathcal{G}'$ and the n -graphs named bridges. The results of Chapter III determine which 2-graphs can occur as $\mathcal{G}'$ and describe the possibilities of joining the bridges to $\mathcal{G}'$. Only the inner structure of the bridges remains open to the complete description of these graphs.

I call the attention of the reader to the most immediate further problems: the question of investigating the complementary class of the irreducible 2-graphs (cf. Footnote ¹³) and the question of considering the bridges (cf. Footnotes ¹⁷, ²⁰).

I wish to express my deep gratitude to Prof. T. GALLAI, Prof. L. KALMÁR and Dr. G. POLLÁK for their suggestions and assistance of various nature.

I. GENERAL PRELIMINARIES

§ 1

A *graph* is a finite collection of *vertices* and a finite collection of *edges*. Each edge connects two distinct vertices, named the *terminals* of the edge. The same pair of vertices can be joined by more than one edge. Each vertex is incident to at least one edge.

The edges of a graph are not oriented a priori. However, if we denote an edge by a letter (e. g. by k), then this edge is considered in a fixed orientation, correspondingly one of its terminals is called its *beginning vertex*, and the other one is called its *end vertex*.

³ The equivalence of the properties α), γ) of Theorem 3 was exposed without proof both in the paper [9] of RIORDAN and SHANNON (p. 84, Footnote ⁵) and in the abstract [10] of LUNTZ. Essentially the same result was arrived in the paper [5] of ELGOT and WRIGHT, I remark that the publication of this theorem in [1] has preceded their article.

A (finite) sequence

$$A_0, k_1, A_1, k_2, A_2, \dots, A_{n-1}, k_n, A_n \quad (n \geq 0)$$

of vertices and edges is called an *arc* if the vertices $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ are pairwise distinct, and A_n is distinct from each of $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, and the beginning vertex of the edge k_i is A_{i-1} , and the end vertex of k_i is A_i (for any i , $1 \leq i \leq n$). An arc is called *chain* or *circuit*, according as $A_0 \neq A_n$ or $A_0 = A_n$, respectively. A_0 is the *beginning vertex* of the chain, A_n is the *end vertex* of the chain; "terminals of the chain" will be a common term for them.⁴ $A_0 = A_n$ is called the *terminal* of the circuit. The vertices $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ are the *inner vertices* of the arc. If $n = 0$, then we speak of a *degenerated chain*. We make no distinction between the edge k and the chain A, k, B . Two chains are said to be *disjoint* if they have no edge in common and any common vertex is a terminal of both of them.⁵

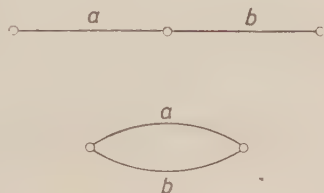


Fig. 1

The arcs will be denoted by Latin small letters. The terminals of a chain are eventually in round brackets, e.g. $a(PQ)$. If A and B are vertices of a chain and A precedes B in the chain, then $a[AB]$ denotes the subchain of a between A and B . The converse direction is denoted as $(-1)^{\text{th}}$ power, e.g. $a^{-1}(QP)$, $a^{-1}[BA]$. If one of the equalities $k = a[AB]$ and $k^{-1} = a[BA]$ is true for the edge $k(AB)$ and the chain a , then we can express this fact by the following three manners, equivalently:

a contains k ,

k is an edge of a ,

k occurs in the chain a .

If the chains $a(AB)$ and $b(BC)$ have no vertex in common but B , then the product ab means the chain containing firstly the vertices and edges of a , after these the vertices and edges of b (in the original ordering), but B occurs only once in ab .

Let there be given a subset η of the set of the edges of a graph. The graph consisting of the elements of η and the vertices incident to them is called a *subgraph* of the graph.

⁴ We shall use the word "terminal" in an analogous sense also without explicit definition.

⁵ Therefore it is allowed that two disjoint chains join to each other as it can be seen on Fig. 1.

LEMMA 1. Let α be an arbitrary subset of the set of the vertices of the graph $\mathcal{G}$. We introduce a binary relation ϱ_α in the set of the edges of $\mathcal{G}$ by what follows. ϱ_α holds for the edges k_1, k_2 if and only if there exists an arc whose first edge is k_1 and whose last edge is k_2 such that this arc contains no element of α as its inner vertex. Then ϱ_α is an equivalence relation.

PROOF. ϱ_α is trivially reflexive and symmetrical. We must verify that it is transitive too. Let $a(AB)$ be an arc whose first and last edges are k_1 and k_2 , respectively, and which contains no element of α innerly. Let $b(CD)$ be an arc having similar properties for k_2 and k_3 . Let the first inner vertex of a which occurs also in b denoted by E . Then one of the arcs $a[AE] \cdot b[ED]$ and $a[AD] \cdot k_3^{-1}$ exists (according as $D \neq E$ or $D = E$, respectively) and has no element of α innerly; so ϱ_α holds also for k_1 and k_3 .

§ 2

A connected graph is called a *graph with n terminals* (or briefly *n -graph*) if there are distinguished n vertices in it ($n \geq 2$). We shall demand later some connection properties to the n -graphs. A vertex of an n -graph distinct from the terminals is called an *inner vertex* of them. A chain is called an *inner chain* if all inner vertices in it are inner vertices of the graph. An n -graph is *strictly connected* if

(1) it consists of a single edge (and the terminals of the graph are the terminals of the edge), or

(2a) its any edge is contained in an inner chain the terminals of which are terminals of the graph, and

(2b) any two vertices can be joined by an inner chain, and

(2c) there is no edge between any two terminals of the graph.

The present paper will investigate the 2-graphs especially. In a 2-graph the terminals are called *beginning vertex* and *end vertex* of the graph (denoted by P and Q , respectively). The 2-graph consisting of a single edge between its terminals is called the *trivial 2-graph*. If the beginning vertex of a chain is the beginning vertex of the graph and the end vertex of the chain is the end vertex of the graph, then this chain is called a *path*. A 2-graph is said to be *strongly connected* if its any edge is contained in a path.⁶ A strictly connected 2-graph is also strongly connected.⁷

⁶ The following equivalent conditions are known for a graph to be strongly connected (we use also concepts not yet introduced):

(a) any subgraph of the graph has at least two terminals (see [12], Lemma 2, p. 229),

(b) any vertex of the graph is contained in a path (see [1], Theorem 1, p. 213).

⁷ Furthermore: a 2-graph is strictly connected if and only if it is an indecomposable or series decomposable strongly connected 2-graph.

Let a subgraph $\mathfrak{H}$ of the 2-graph $\mathfrak{G}$ be considered according to the subset ν_i of the set ε of the edges of $\mathfrak{G}$. If we do not agree otherwise, then a vertex is called a *terminal* of $\mathfrak{H}$ if

it is a terminal of $\mathfrak{G}$ and belongs to $\mathfrak{H}$, or

there exists an element of ν_i incident to it and there exists an element of $\varepsilon - \nu_i$ incident to it.⁸ The whole graph and the one-edge subgraphs form obviously 2-subgraphs (i. e. subgraphs with 2 terminals) of a 2-graph. The 2-subgraphs different from these will be called *proper* ones. A 2-graph is *irreducible* if it differs from the graphs on Fig. 2 and has no proper 2-subgraph.⁹ In [12] it is studied the decomposition of the 2-graphs into irreducible ones (§ 3).

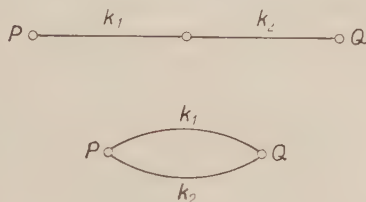


Fig. 2

A non-degenerated chain $a(AB)$ of a 2-graph is a *double chain* if there exist two paths b and c such that $b[AB] = a$ and $c[BA] = a^{-1}$. Thus there are defined also the *double edges*. Evidently, a 2-graph contains a double edge if and only if it contains a double chain.

Seven chains $a(AB)$, $b(PC)$, $c(CA)$, $d(CB)$, $e(AD)$, $f(BD)$, $g(DQ)$ of a 2-graph are said to *join to each other as the Wheatstone bridge* if

they are pairwise disjoint, and

a, c, d, e, f are non-degenerated, and

the vertices P, A, B, C, D, Q are pairwise distinct, only the coincidences $P = C$ or $Q = D$ are allowed (if b or g are degenerated, respectively).

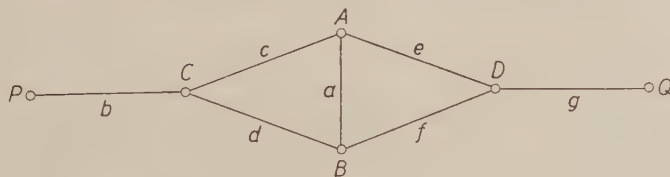


Fig. 3

(See Fig. 3.) If both of b and g are degenerated, then we speak of a *simple Wheatstone bridge*.

In Chapter II we shall consider strongly connected 2-graphs. Throughout Chapter III (except § 9) $\mathfrak{G}$ will denote a strongly connected irreducible 2-graph.

⁸ It will occur one exceptional agreement in § 5 at defining the terminals of $\mathfrak{G}$.

⁹ We mention that we use the word "irreducible" in the same sense as TRACHTENBROT. This terminology differs from the one of the Hungarian publications: there the term "irreducible" has the same meaning as "indecomposable" in the present paper.

II. SERIES-PARALLEL DECOMPOSITION

§ 3

Let there be given a 2-graph $\mathcal{G}$. Let two edges k_1, k_2 be equivalent if and only if there exists an arc whose first edge is k_1 and whose last edge is k_2 such that it contains neither P nor Q as its inner vertex (see Lemma 1). It is clear that each of the subgraphs belonging to the equivalence classes has exactly two terminals, namely the terminals of $\mathcal{G}$. Let P be considered as the beginning vertex of each subgraph and Q as the end vertex of each subgraph; thus we have defined 2-graphs in $\mathcal{G}$ such that any edge of $\mathcal{G}$ is contained in exactly one of these 2-graphs. The 2-graphs now defined are called the *parallel components* of $\mathcal{G}$. Any parallel component of $\mathcal{G}$ is considered as a 2-graph having P as its beginning vertex and Q as its end vertex. If $\mathcal{G}$ has at least two parallel components, then it is *parallel decomposable*, in the contrary case (i. e. if it has only one parallel component, namely itself) it is *parallel indecomposable*.

A vertex A is called a *knot vertex* of $\mathcal{G}$ if every path of $\mathcal{G}$ contains A as its inner vertex.

LEMMA 2. *Each path of $\mathcal{G}$ contains the knot vertices in the same order*

PROOF. Suppose that the lemma is false. This means that there are two knot vertices A, B and two paths a, b such that A precedes B in the path a and B precedes A in the path b . Let C be the first vertex of b which occurs also in the chain $a[BQ]$. Then C precedes A in b (because it must be B or a vertex preceding B in b), and there exists the path $b[PC] \cdot a[CQ]$. This path does not contain A in contradiction to the definition of the knot vertices.

Lemma 2 gives the possibility of introducing an ordering (denoted by $\prec$) in the set formed by the knot vertices and the terminals.

LEMMA 3. *Let the knot vertices of $\mathcal{G}$ be denoted by $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ (so that $A_1 \prec A_2 \prec \dots \prec A_{n-1}$), let an edge k and a path a be given. If k occurs in the chain $a[A_{i-1}A_i]$ and b is a path containing k , then $b[A_{i-1}A_i]$ contains k ($1 \leq i \leq n$, P is denoted also by A_0 , Q is denoted also by A_n).*

PROOF. Suppose that k is contained in $b[A_{j-1}A_j]$ where $j \neq i$.

Case 1: $j < i$. Let B be the first vertex of b which occurs also in $a[A_{i-1}Q]$. Then $b[PB] \cdot a[BQ]$ is a path which does not contain A_{i-1} , what is a contradiction.

Case 2: $j > i$. The proof is similar, the roles of a and b , i and j are interchanged.

Now we define classes in the set of the edges of $\mathfrak{G}$: k belongs to the i^{th} class ($1 \leq i \leq n$) if there exists a path a such that k is contained in $a[A_{i-1}A_i]$. Lemma 3 ensures that any edge is the element of exactly one class. The subgraphs corresponding to the equivalence classes are called the *series components* of $\mathfrak{G}$. (The i^{th} series component is the series component which belongs to the i^{th} class.) We shall consider each series component after the following lemma as a 2-graph:

LEMMA 4. *Let the i^{th} and j^{th} series components be given ($1 \leq i < j \leq n$). The following statements are true:*

if $i+1=j$, then the two components have exactly one common vertex, namely A_i ,

if $i+1 < j$, then the two components have no vertex in common.

PROOF. Assume that the lemma is not fulfilled.

Case 1: let the i^{th} component be the first one which has a vertex (distinct from A_i) common to some of the further components. Let A be common vertex in the i^{th} component such that A is the first vertex of similar nature on a suitable path a . The property supposed above of A means that there exists a path b such that A occurs in the chain $b[A_{j-1}A_j]$ where $j > i$. Then the path $a[PA] \cdot b[AQ]$ exists and cannot contain the vertex A_i , so A_i is no knot vertex. This contradiction disproves the hypothesis.

Case 2: let the i^{th} component be the last one which has a vertex (distinct from A_{i-1}) common to some of the preceding components. The inference symmetrical to Case 1 leads to a contradiction.

For any i ($1 \leq i \leq n$) let A_{i-1} be the beginning vertex and let A_i be the end vertex of the i^{th} series component. If $\mathfrak{G}$ has at least two series components, then it is *series decomposable*, in the contrary case it is *series indecomposable*. $\mathfrak{G}$ is series indecomposable if and only if it has no knot vertex, i. e. for any inner vertex A of $\mathfrak{G}$ there exists a path which does not contain A . It is clear that a parallel decomposable 2-graph cannot have a knot vertex, so there holds

LEMMA 5. *Any parallel decomposable 2-graph is series indecomposable.*



Fig. 4

If a 2-graph is parallel indecomposable and series indecomposable, then we call it to be *indecomposable*. Any irreducible 2-graph is indecomposable.¹⁰

We can introduce the concept of the *constituent* of a 2-graph $\mathfrak{G}$ inductively. $\mathfrak{G}$ itself is a constituent. If $\mathfrak{H}$ is a constituent of $\mathfrak{G}$, then any series

¹⁰ The converse statement does not hold, let us investigate e. g. the graph on Fig. 4.

or parallel component of $\mathfrak{H}$ is also a constituent of $\mathfrak{G}$. (Evidently, if $\mathfrak{H}$ is a series component of the constituent $\mathfrak{H}'$, then $\mathfrak{H}$ is indecomposable or parallel decomposable; and vice versa.) It is clear that any 2-graph admits a unique decomposition into indecomposable constituents (the uniqueness is meant up to the ordering and association of the parallel components, up to the association of the series components.) It is evident that any constituent is strongly connected.

§ 4

THEOREM 1. *If $\mathfrak{G}$ is a non-trivial indecomposable 2-graph, then $\mathfrak{G}$ contains a pair of disjoint paths.^{11, 12}*

PROOF. Let c be a path of $\mathfrak{G}$. A denotes the first vertex of c such that there exists a chain $a(AQ)$ disjoint to both of $c[PA]$ and $c[AQ]$. (There exists always a vertex $\neq Q$ of this property. This fact becomes evident if one considers a path such that its last edge differs from the last edge of c .) B denotes the last vertex of c such that there exists a chain $b(PB)$ disjoint to both of $c[PB]$ and $c[BQ]$.

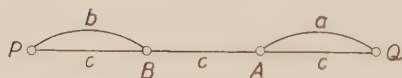
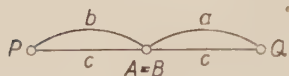
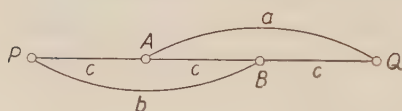


Fig. 5

Case 1: a and b are not disjoint. Let D be the first vertex of b which is contained also in a . Then $b[PD] \cdot a[DQ]$ is a path disjoint to c .

Case 2: a and b are disjoint. If $c[AB]$ exists, then the number of its edges is called the *index* of c . If $c[BA]$ exists and has n edges, then $-n$ is called the index of c . (In the case $A=B$ the index is 0.) Let now c be a path having maxi-

mal index. The further proof splits into three subcases (in each subcase see the corresponding part of Fig. 5), we remark that the second and third ones cannot occur really.

Case 2a: the index of c is positive. Then $b[PB] \cdot c[BQ]$ and $c[PA] \cdot a[AQ]$ are disjoint paths.

¹¹ This theorem was firstly formulated in [12] (p. 244). It can be deduced from the well-known theorem of Menger (see e. g. [6], p. 244). The present proof differs from the one of Trachtenbrot, and it is a modified version of the inference which proves in [1] immediately Theorem 2 (Corollary 1 of the present article).

¹² The statement is obvious for parallel decomposable graphs. The theorem can be exposed also as follows: if any two paths of a 2-graph have an inner vertex in common, then all the paths have an inner vertex in common.

Case 2b: the index of c is 0. Let us consider a path d which does not contain $A = B$. There exists a chain having the following properties: it is a part of d , its beginning vertex is on b or on $c[PA]$, its end vertex is on a or on $c[AQ]$, and it includes no proper subchain having these properties. In any possible cases one can find two disjoint paths.

Case 2c: the index of c is negative. Let us consider a path d which does not contain B . Its suitable subchain has its beginning vertex on b or on $c[PB]$ and its end vertex on a or on $c[BQ]$, and it is minimal among the subchains of this property. If the end vertex of this subchain lies on $c[BA]$, then we get a contradiction to the maximality of the index of c . In the other case the proof can be completed as in the case 2b.

THEOREM 2. *Any non-trivial indecomposable 2-graph $\mathfrak{G}$ contains five chains joining to each other as the simple Wheatstone bridge.*

PROOF. Let h_1 and h_2 be two paths of $\mathfrak{G}$ disjoint to each other. Let A and B be arbitrary inner vertices of h_1 and h_2 , respectively. Let $l(AB)$ be a chain connecting A and B , containing neither P nor Q . Let the first vertex of l which lies on h_2 be denoted by C ; let the last vertex of $l[AC]$ which lies on h_1 be denoted by D . Then the chains $a = l[DC]$, $c = h_1[PD]$, $d = h_2[PC]$, $e = h_1[DQ]$, $f = h_2[CQ]$ form a simple Wheatstone bridge.

THEOREM 3. *The following three properties are equivalent for a 2-graph $\mathfrak{G}$:*

- $\alpha)$ $\mathfrak{G}$ has a non-trivial indecomposable constituent,
- $\beta)$ $\mathfrak{G}$ contains chains joining to each other as the Wheatstone bridge,
- $\gamma)$ $\mathfrak{G}$ contains a double chain.

PROOF. $\alpha) \rightarrow \beta)$. The non-trivial indecomposable constituent of $\mathfrak{G}$ has a simple Wheatstone bridge by Theorem 2. One can see that if some (series or parallel) component of a graph contains a (simple or non-simple) Wheatstone bridge, then the graph itself has a Wheatstone bridge. Hence the statement follows inductively.

$\beta) \rightarrow \gamma)$. The chain a of a Wheatstone bridge is evidently a double one.

$\gamma) \rightarrow \alpha)$. If no (series or parallel) component of $\mathfrak{G}$ contains a double chain, then $\mathfrak{G}$ cannot have such a one. So the falsity of $\alpha)$ implies the falsity of $\gamma)$ inductively.

COROLLARY 1. *Any non-trivial indecomposable 2-graph contains a double chain.*

THEOREM 4. *If $a_1(A_1B_1)$ is a double chain of the 2-graph $\mathfrak{G}$, then $\mathfrak{G}$ contains chains joining to each other as the Wheatstone bridge such that a_1 or a_1^{-1} is included in a .*

PROOF. There exists a double chain $a(AB)$ including (eventually non-properly) a_1 such that a is not included in any double chain properly. Let us consider two paths h_1, h_2 such that $h_1[AB] = a$ and $h_2[BA] = a^{-1}$. Let C be the last vertex of $h_2[PB]$ such that it occurs also in $h_1[PA]$. Let D be the first vertex of $h_2[AQ]$ which occurs also in $h_1[BQ]$. Then the chains $a, b = h_1[PC], c = h_1[CA], d = h_2[CB], e = h_2[AD], f = h_1[BD], g = h_1[DQ]$ fulfil almost all the statements of the theorem immediately by their definition. We must yet prove only two statements. $h_2[AD]$ and $h_1[PA]$ are disjoint: if we suppose the contrary, then let the first inner vertex of $h_2[AD]$ which occurs in $h_1[PA]$ be denoted by F : there exists the path

$$h_1[PF] \cdot h_2^{-1}[FB] \cdot h_1[BQ],$$

so $h_2[BF]$ is a double chain including a properly; this contradicts the definition of a . We can prove in a similar way that $h_2[CB]$ and $h_1[BQ]$ are disjoint (if the last inner vertex of $h_2[CB]$ common to $h_1[BQ]$ is denoted by G , then there exists $h_1[PA] \cdot h_2^{-1}[AG] \cdot h_1[GQ]$).

III. BRIDGES AND THEIR SITUATION

§ 5

Throughout §§ 5—8 let $\mathfrak{G}$ be an irreducible 2-graph which satisfies the following condition: there exists a path of $\mathfrak{G}$ in which no double edge occurs.^{13, 14} We are going to define a 2-graph $\mathfrak{G}'$ and some n -graphs (named bridges) in $\mathfrak{G}$, so that each edge of $\mathfrak{G}$ is contained in exactly one of $\mathfrak{G}'$ and the bridges.

Let $\mathfrak{G}'$ be the subgraph of $\mathfrak{G}$ determined by the set of edges of the paths without double edge. $\mathfrak{G}'$ contains the terminals of $\mathfrak{G}$. We agree that only they are considered to be the terminals of $\mathfrak{G}'$. So $\mathfrak{G}'$ becomes a 2-graph

¹³ The complementary class of the irreducible 2-graphs can be characterized as the collection of the graphs whose each path contains a double edge. It is desirable to get structural results on these graphs, but it seems to be a difficult problem to arrive deeper ones.

¹⁴ In [2] I have introduced a more complicated classification of the indecomposable 2-graphs into seven classes. Four of these classes were shown to be empty by the following theorem of G. POLLÁK (see [8]): to any edge k of a non-trivial indecomposable graph there exists a double edge k^* such that a suitable path contains both of k and k^* . The remaining three classes correspond to the two classes now introduced, it is made there a distinction according as every edge beside $\mathfrak{G}'$ is a double one or not. So the situation of bridges is studied separately in [2] and [4] corresponding to this distinction.

with the terminals P and Q . It is evidently strongly connected and contains no double edge (a double edge of $\mathfrak{G}'$ would be a double edge of $\mathfrak{G}$). So Theorem 3 ensures that every indecomposable constituent of $\mathfrak{G}'$ is a trivial 2-graph.

The edges being beside $\mathfrak{G}'$ form a subgraph $\mathfrak{G}''$ of $\mathfrak{G}$ (non-connected in general). Let us introduce a classification of these edges in accordance with Lemma 1, being α the set of the vertices occurring in both of $\mathfrak{G}''$ and $\mathfrak{G}'$. The subgraphs of $\mathfrak{G}$, each of which is determined by the edges of an equivalence class, are named *bridges*. We define the terminals of the bridges in the sense of § 2. Each bridge is a strictly connected n -subgraph of $\mathfrak{G}$.

Fig. 6 shows some graphs on which one can study the former definitions. (The last graph does not belong to the class introduced here.)

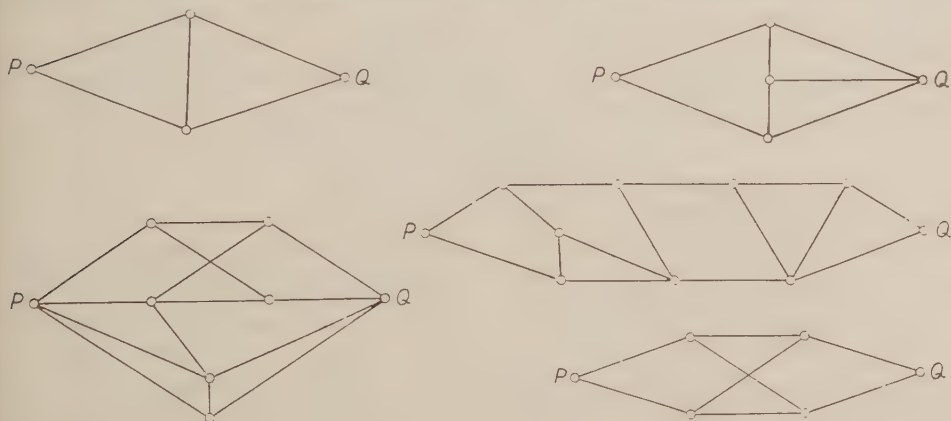


Fig. 6

THEOREM 5. *Let $\mathfrak{G}$ be an irreducible 2-graph having at least one path without double edge. Then either*

- (a) $\mathfrak{G}'$ is series decomposable and its each component is a trivial 2-graph, or
- (b) $\mathfrak{G}'$ is parallel decomposable and its each component is a graph described in (a).

PROOF. Suppose that the theorem is false for some $\mathfrak{G}$. This means that one of the following four statements holds for the structure of $\mathfrak{G}'$:

- α) $\mathfrak{G}'$ is a trivial 2-graph,
- β) $\mathfrak{G}'$ is series decomposable and its some component is parallel decomposable,
- γ) $\mathfrak{G}'$ is parallel decomposable and its some component is a trivial 2-graph,

$\delta)$ $\mathfrak{S}'$ is parallel decomposable and has a component whose some series component is parallel decomposable.

The impossibility of α) and γ) follows from the irreducibility (especially: from the parallel indecomposability) of $\mathfrak{S}$.

The impossibility of β). Let the parallel decomposable component of $\mathfrak{S}'$ be denoted by $\mathfrak{H}$.

Case 1: there is no bridge having a terminal (innerly) in $\mathfrak{H}$ and another terminal beside $\mathfrak{H}$. Then $\mathfrak{H}$ and the bridges whose terminals are in $\mathfrak{H}$ form a 2-subgraph of $\mathfrak{S}$. This contradicts the irreducibility of $\mathfrak{S}$.

Case 2: there exists a bridge $\mathfrak{D}$ such that its terminal A is an inner vertex of $\mathfrak{H}$ and its terminal B is not contained in $\mathfrak{H}$. Our purpose is to show that some edges of $\mathfrak{H}$ are double edges, this will be a contradiction. Indeed, if B is contained in a series component which precedes $\mathfrak{H}$, then let $a(BA)$ be an inner chain of $\mathfrak{D}$, let b be a path of $\mathfrak{S}'$ containing A , let c be a path of $\mathfrak{S}'$ which does not contain A , let C be the last vertex of $b[PA]$ which occurs also in c . Then there exists the path

$$d[PB] \cdot a \cdot b^{-1}[AC] \cdot c[CQ]$$

where d is an arbitrary path of $\mathfrak{S}'$ containing b . So $\mathfrak{H}$ contains a double chain (Fig. 7). If the series component containing B is preceded by $\mathfrak{H}$, then the proof is analogous.

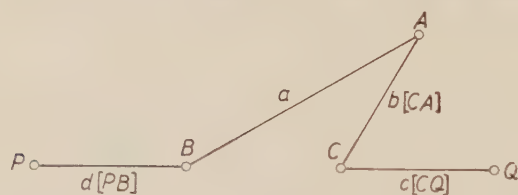


Fig. 7

The impossibility of δ) can be verified similarly to the impossibility of β). Let $\mathfrak{H}$ be a parallel decomposable component of the component $\mathfrak{H}'$ of $\mathfrak{S}'$. The former inference can be applied without any essential modification ($\mathfrak{S}'$ must be substituted by $\mathfrak{H}'$); it remains a further case: the case if $\mathfrak{H}'$ does not contain B (but B is contained in another parallel component of $\mathfrak{S}'$). One can apply the former inference also in this case.

§ 6

In what follows the preceding relation $\prec$ will be applied always in the set of the vertices of $\mathfrak{S}'$. If the first statement of Theorem 5 holds for $\mathfrak{S}'$, then it is not necessary to elucidate nearerly the meaning of the sign $\prec$; if the second statement holds for $\mathfrak{S}'$, then $\prec$ is meant in some component of $\mathfrak{S}'$.

We shall introduce a distinction among the bridges. A bridge $\mathfrak{D}$ of the 2-graph $\mathfrak{S}$ is called a *pseudo-bridge* if either

(a) $\mathfrak{G}'$ is series decomposable, or

(b) $\mathfrak{G}'$ is parallel decomposable and there exists a component $\mathfrak{H}$ of $\mathfrak{G}'$ which contains all the terminals of $\mathfrak{D}$.

The other bridges are called *real bridges*. (Evidently, a bridge is real if and only if there exist two parallel components $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ of $\mathfrak{G}'$ such that two suitable terminals A and B of $\mathfrak{D}$ are inner vertices of $\mathfrak{H}_1$ and $\mathfrak{H}_2$, respectively.)

The terminal A of the bridge $\mathfrak{D}$ is called an *inner terminal* of $\mathfrak{D}$ if it differs from the terminals of $\mathfrak{G}$. The real bridges $\mathfrak{D}_1$ and $\mathfrak{D}_2$ are called to be *equivalent* if their all inner terminals coincide (i. e. each inner terminal of $\mathfrak{D}_1$ is an inner terminal of $\mathfrak{D}_2$, and conversely).

Let us consider the bridge $\mathfrak{D}$, let A and B be two terminals of $\mathfrak{D}$ such that $A < B$. Then an inner chain $a(AB)$ of $\mathfrak{D}$ is called a *shunt*. Now let there be given two terminals C, D of $\mathfrak{D}$ being (innerly) in distinct parallel components of $\mathfrak{G}'$. Then an inner chain $c(CD)$ of $\mathfrak{D}$ is called a *cross-chain*. "Direct chain" will be a common term for shunts and cross-chains.¹⁵

Let $\mathfrak{G}'$ be parallel decomposable. Two distinct components $\mathfrak{H}_\alpha, \mathfrak{H}_\beta$ of $\mathfrak{G}'$ are called to be *associated* if there exists a sequence

$$\mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \dots, \mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}_\beta \quad (n \geq 2)$$

such that for any i ($2 \leq i \leq n$) there exists a (real) bridge $\mathfrak{D}$ two suitable terminals of which are inner vertices of $\mathfrak{H}_{i-1}$ and $\mathfrak{H}_i$, respectively. Each component is regarded to be associated with itself. So we have defined an equivalence relation.

LEMMA 6. *The following three statements are equivalent for an inner chain $a(AB)$ of a bridge $\mathfrak{D}$ where A and B are inner terminals of $\mathfrak{D}$:*

$\alpha)$ $a(AB)$ is a direct chain of $\mathfrak{D}$,

$\beta)$ there exists a path b of $\mathfrak{G}$ such that $b[AB] = a$ and each edge of the chains $b[PA]$, $b[BQ]$ belongs to $\mathfrak{G}'$,

$\gamma)$ there exists a path b of $\mathfrak{G}$ such that $b[AB] = a$.

PROOF. $\alpha) \rightarrow \beta)$. Let c and d be two paths of $\mathfrak{G}'$ containing A and B , respectively. Then $c[PA] \cdot a \cdot d[BQ]$ exists and satisfies $\beta)$.

$\beta) \rightarrow \gamma)$ is trivial.

$\gamma) \rightarrow \alpha)$. Suppose that $\gamma)$ is fulfilled but $\alpha)$ is not true. The falsity of $\alpha)$ means that A and B cannot lie in distinct parallel components of $\mathfrak{G}'$ and $B < A$ holds. So the pair of vertices A, B has the two properties:

(a') A precedes B in the path b ,

(b') $B < A$.

¹⁵ If a is a shunt, then a^{-1} is no direct chain. If a is a cross-chain, then also a^{-1} is a cross-chain.

Let us consider all the pairs of vertices C, D of $\mathfrak{S}'$ having the properties:

- (a) D precedes C in the path b , and
- (b) $C \prec D$

(the chain b is fixed). One can show that there exist two vertices C', D' satisfying (a), (b), and the property:

- (c) if $C \prec X \prec D$ holds for a vertex X of $\mathfrak{S}'$, then X does not occur in b .¹⁶

Let now e be a path of $\mathfrak{S}'$ containing C and D . Then the path

$$b[PD] \cdot e^{-1}[DC] \cdot b[CQ]$$

exists, so $e[CD]$ is a double chain. This contradiction proves the lemma.

LEMMA 7. *An edge $k(AB)$ of a bridge $\mathfrak{D}$ is double if and only if there exist two direct chains a, b of $\mathfrak{D}$ such that $a[AB] = k$ and $b[BA] = k^{-1}$.*

This lemma follows immediately from the equivalence of the properties α) and β) in the preceding lemma.

THEOREM 6. *Any shunt of a bridge $\mathfrak{D}$ of $\mathfrak{S}$ contains a double edge.*¹⁷

PROOF. Let there be given a shunt a of $\mathfrak{D}$. The statement β) of Lemma 6 holds for a ; if a contains no double edge, then each edge of b belongs to $\mathfrak{S}'$ (by the definition of $\mathfrak{S}'$), what is a contradiction.

THEOREM 7. *To each inner vertex A of $\mathfrak{S}'$ there exists a bridge $\mathfrak{D}$ such that A is a terminal of $\mathfrak{D}$. If $\mathfrak{S}'$ is parallel decomposable, then its any two components are associated. A bridge cannot include a 2-subgraph consisting of more than one edge. Let the equivalent (real) bridges $\mathfrak{D}_\alpha, \mathfrak{D}_\beta$ be considered; one of them has at least three terminals.*¹⁸

PROOF. The propositions of the theorem are implied obviously by the irreducibility of $\mathfrak{S}$. The second statement is perhaps not so evident as the other ones; if it were false, then let the equivalence classes of the components

¹⁶ This fact can be verified in the following manner. We start with a pair of vertices C, D satisfying (a) and (b). If there exists a vertex X occurring in b which satisfies $C \prec X \prec D$, then we have three possibilities: X can occur in $b[PD]$ or in $b[DC]$ or in $b[CQ]$. In each of these cases the statements (a) and (b) are fulfilled either by C and X or by X and D . This inference leads in a finite number of steps to a pair of vertices which satisfies (c).

¹⁷ The analogous statement is evident for cross-chains. Lemma 7 makes clear what this restriction means for the inner structure of $\mathfrak{D}$ ("inner structure" is thought together with the partial ordering $\prec$ of the terminals).

¹⁸ I. e. if they have two inner terminals, then either P or Q occurs as a terminal of one of them.

of $\mathfrak{G}'$ be formed according to the relation of being associated. If we regard these classes and to any class the bridges which have the terminals in it, then we get that $\mathfrak{G}$ is parallel decomposable.

Theorem 6 and the third statement of Theorem 7 imply

COROLLARY 2. *If a bridge has only two terminals, then it consists of one edge and it is a real bridge.*

THEOREM 8. *Let us consider two inner chains $f(AB)$ and $g(CD)$ of a bridge $\mathfrak{D}$. If one of the following assumptions $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$ is fulfilled, then f and g are not disjoint:*

$\alpha)$ $P \preceq A \prec C \prec B \prec D \preceq Q$.

$\beta)$ $P \prec A \prec D \prec Q$ and $C \prec B$ are valid in two distinct parallel components of $\mathfrak{G}'$, there holds at most one of the coincidences $P = C$ and $Q = B$.¹⁹

$\gamma)$ $P \prec A \prec C \prec B \prec Q$ and $P \prec D \prec Q$ are valid in distinct parallel components of $\mathfrak{G}'$.

$\delta)$ $P \prec A \prec C \prec Q$, $P \prec B \prec Q$, $P \prec D \prec Q$ are valid in three distinct parallel components of $\mathfrak{G}'$.

PROOF. Suppose that f and g are disjoint. If a, b, c denote some suitable paths of $\mathfrak{G}'$, then the paths

$$a[PA] \cdot f \cdot a^{-1}[BC] \cdot g \cdot a[DAQ],$$

$$b[PC] \cdot g \cdot a^{-1}[DA] \cdot f \cdot b[BQ],$$

$$a[PA] \cdot f \cdot a^{-1}[BC] \cdot g \cdot b[DQ],$$

$$c[PD] \cdot g^{-1} \cdot a^{-1}[CA] \cdot f \cdot b[BQ]$$

exist in the cases $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$, respectively. So some subchain of a is shown to be a double chain, what is a contradiction.

LEMMA 8. *Let A, B be terminals of a bridge $\mathfrak{D}_\alpha$ and let C, D be terminals of a bridge $\mathfrak{D}_\beta$ (distinct to $\mathfrak{D}_\alpha$). Then A, B, C, D fulfil none of the statements $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$ occurring in Theorem 8.²⁰*

PROOF. If we suppose that A, B, C, D satisfy some of $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$ and consider two inner chains $f(AB)$, $g(CD)$ of $[\mathfrak{D}_\alpha, \mathfrak{D}_\beta]$, respectively, then the inference seen in the proof of Theorem 8 leads to a contradiction.

¹⁹ The case if both of them hold is included in $\alpha)$.

²⁰ Theorem 8 and Lemma 8 could be condensed into one theorem. (Indeed, in [2] and [4] I have chosen this way for exposing them.) In the present paper the method of separating them is followed for methodical reason: the statement of Lemma 8 will be contained in further results more explicitly, however, the present paper does not investigate the possibility of improving Theorem 8.

§ 7

THEOREM 9. Let (S') be parallel decomposable. Then the real bridges of $\mathfrak{G}$ satisfy the following three statements:

(1) If the equivalent bridges $\mathfrak{D}_\alpha, \mathfrak{D}_\beta$ have at least four inner terminals, then any two of these terminals are in distinct components of (S') . If the equivalent bridges $\mathfrak{D}_\alpha, \mathfrak{D}_\beta$ have exactly three inner terminals, and these terminals lie in two components of (S') , then all terminals of $\mathfrak{D}_\alpha$ and all terminals of $\mathfrak{D}_\beta$ are inner ones.

(2) Let $A_\alpha \prec A_\beta$ hold for two suitable inner terminals A_α, A_β of the non-equivalent bridges $\mathfrak{D}_\alpha, \mathfrak{D}_\beta$, respectively. Then P does not occur among the terminals of $\mathfrak{D}_\beta$, Q does not occur among the terminals of $\mathfrak{D}_\alpha$; and $A'_\alpha \prec A'_\beta$ holds for any two inner terminals A'_α, A'_β of $\mathfrak{D}_\alpha, \mathfrak{D}_\beta$, respectively, if they are in a common component of $\mathfrak{G}$.

(3) Suppose that (S') has at least three components and each of the distinct bridges $\mathfrak{D}_\alpha, \mathfrak{D}_\beta$ has an inner terminal in $\mathfrak{H}_1$ where $\mathfrak{H}_1$ is a component of (S') and $\mathfrak{H}_1$ has at least two inner vertices which are terminals of real bridges. Then there exists a component $\mathfrak{H}_2$ such that if a bridge has an inner terminal in $\mathfrak{H}_1$, then it has inner terminals only in $\mathfrak{H}_1$ and $\mathfrak{H}_2$, and $\mathfrak{H}_2$ has only one inner vertex which is a terminal of some real bridge.

The theorem follows from the following lemma and the fact that Lemma 8 is absolutely true.

LEMMA 9. The following propositions are equivalent for the real bridges of $\mathfrak{G}$:

(a) Lemma 8 is valid for any two bridges.

(b) Theorem 9 is valid for the bridges.

(c) Let $\mathfrak{D}_\alpha, \mathfrak{D}_\beta$ be distinct real bridges. Let A_α, A_β be inner terminals of $\mathfrak{D}_\alpha, \mathfrak{D}_\beta$, respectively, satisfying $A_\alpha \prec A_\beta$ in some component $\mathfrak{H}_1$ of (S') . Let A'_α be an inner terminal of $\mathfrak{D}_\alpha$ being in a component $\mathfrak{H}_2 (\neq \mathfrak{H}_1)$ of (S') . Then one of the relations $A_\alpha \prec A'_\beta$ and $A'_\alpha \prec A'_\beta$ is true for any inner terminal A'_β of $\mathfrak{D}_\beta$, further P does not occur among the terminals of $\mathfrak{D}_\beta$ and Q does not occur among the terminals of $\mathfrak{D}_\alpha$. — It is valid the statement which can be got from the preceding part of (c) by converting the signs $\prec$ and $\succ$, by interchanging P and Q .

PROOF. (a) $\rightarrow$ (c). Let the supposition of (c) be fulfilled. If the conclusion were false for A'_β , then either A'_β would be an inner vertex of a component of (S') distinct from both of $\mathfrak{H}_1$ and $\mathfrak{H}_2$, or it would be true one of $A'_\beta \prec A_\alpha$ and $A'_\beta \prec A'_\alpha$. Consider the cross-chains $f(A_\alpha A'_\alpha)$ and $g(A_\beta A'_\beta)$ of $\mathfrak{D}_\alpha$ and $\mathfrak{D}_\beta$, respectively. The existence of f and g contradicts

Lemma 8. We get a contradiction to Lemma 8 also in the case when the statement of (c) for P and Q is false.

(c) $\rightarrow$ (b). First we prove (1). Let A, B, C be inner terminals of the equivalent bridges $\mathfrak{D}_\alpha$ and $\mathfrak{D}_\beta$ satisfying $A \prec B$, do not let C be in the same component as A and B . We can suppose that $A \prec X \prec B$ implies that X is not a terminal of $\mathfrak{D}_\alpha$ and $\mathfrak{D}_\beta$. Now we investigate an arbitrary terminal D of $\mathfrak{D}_\alpha$ and $\mathfrak{D}_\beta$; we are going to apply (c). By the substitution of A, B, C, D for $A_\alpha, A_\beta, A'_\alpha, A'_\beta$, respectively, (c) ensures that either $C \prec D$ or $A \prec D$ holds. If we apply the symmetrical part of (c), then a similar inference leads to the validity of $D \prec C$ or $D \prec B$. These preceding relations mean that D is equal to one of A, B, C .

Let the assumption of (2) be true, and let us suppose that $A_\alpha \prec X \prec A_\beta$ implies that X is not an inner terminal of $\mathfrak{D}_\alpha$ or $\mathfrak{D}_\beta$. The statements for P and Q follow trivially from (c). If A_α and A'_α lie in distinct components of $\mathfrak{G}'$, then (c) implies evidently the statement to be proved. In the other case $A_\alpha, A_\beta, A'_\alpha, A'_\beta$ are knot vertices of the same component $\mathfrak{H}$ of $\mathfrak{G}'$; our purpose is to show that $A'_\beta \prec A'_\alpha$ implies that $\mathfrak{D}_\alpha$ and $\mathfrak{D}_\beta$ are equivalent bridges. Indeed, we have only one possibility for avoiding the contradiction to (c): there holds $A'_\beta = A_\alpha \prec A_\beta \prec A'_\alpha$, and $\mathfrak{H}_1$ contains no other inner terminal of $\mathfrak{D}_\alpha$ or $\mathfrak{D}_\beta$. Let us now consider arbitrary further inner terminals A_α^*, A_β^* of $\mathfrak{D}_\alpha, \mathfrak{D}_\beta$, respectively, (c) ensures both of $A_\alpha^* \prec A_\beta^*$ and $A_\beta^* \prec A_\alpha^*$. This means that $A_\alpha^* = A_\beta^*$, hence $\mathfrak{D}_\alpha$ and $\mathfrak{D}_\beta$ are equivalent bridges.

Let the supposition of (3) be fulfilled. Then there exist two suitable different bridges $\mathfrak{D}_\alpha, \mathfrak{D}_\beta$ such that A_α and A_β are distinct knot vertices of $\mathfrak{H}_1$ where A_α, A_β are terminals of $\mathfrak{D}_\alpha, \mathfrak{D}_\beta$, respectively. Let $\mathfrak{H}_2 (\neq \mathfrak{H}_1)$ be a component of $\mathfrak{G}'$ containing some inner terminal of $\mathfrak{D}_\alpha$. Then (c) ensures that each terminal of $\mathfrak{D}_\beta$ lies in $\mathfrak{H}_1$ or $\mathfrak{H}_2$. Furthermore, a similar inference shows that every terminal of $\mathfrak{D}_\alpha$ is contained in $\mathfrak{H}_1$ or $\mathfrak{H}_2$. If $\mathfrak{D}_\gamma$ is an arbitrary bridge having an inner terminal in $\mathfrak{H}_1$, then the same inference can be carried out for $\mathfrak{D}_\gamma$ and for one of $\mathfrak{D}_\alpha$ and $\mathfrak{D}_\beta$, consequently also $\mathfrak{D}_\gamma$ has all its terminals in $\mathfrak{H}_1$ and $\mathfrak{H}_2$. We must yet prove the last statement of (3). Since $\mathfrak{G}'$ consists of at least three components and its any two components are associated by Theorem 7, there exists a bridge $\mathfrak{D}_\delta$ having some inner terminals in $\mathfrak{H}_2$ and in a component of $\mathfrak{G}'$ different from $\mathfrak{H}_1$ and $\mathfrak{H}_2$. ($\mathfrak{D}_\delta$ cannot have an inner terminal in $\mathfrak{H}_1$.) So there exist two non-void classes of the bridges having inner terminals in $\mathfrak{H}_2$: the bridges having an inner terminal in $\mathfrak{H}_1$ and the bridges having no inner terminal in $\mathfrak{H}_1$. If we choose one representative from both classes, then (c) ensures that there exists exactly one knot vertex of $\mathfrak{H}_2$ occurring as a terminal of (at least) one

of the representatives. Since the choice can happen arbitrarily, $\mathfrak{H}_2$ has only one inner vertex which occurs as a terminal of a bridge.

(b) $\rightarrow$ (a). If (a) were not fulfilled, then there would exist two (different) bridges $\mathfrak{D}_\alpha, \mathfrak{D}_\beta$ such that suitable terminals A, B of $\mathfrak{D}_\alpha$ and suitable terminals C, D of $\mathfrak{D}_\beta$ satisfy one of $\alpha), \beta), \gamma), \delta)$ in Theorem 8. In each of these cases one can see that some of the statements (1), (2), (3) occurring in Theorem 9 is not fulfilled.

THEOREM 10. *Let $\mathfrak{G}'$ be parallel decomposable. If $\mathfrak{D}$ is a pseudo-bridge of $\mathfrak{G}$, then $\mathfrak{D}$ has exactly three terminals, namely P, Q and the inner vertex A of some component of $\mathfrak{G}'$ which consists of two edges.*

PROOF. Suppose that the theorem is not satisfied by a pseudo-bridge $\mathfrak{D}$. Corollary 2 assures that $\mathfrak{D}$ has at least three terminals, this means that the component $\mathfrak{H}_1$ of $\mathfrak{G}'$ containing the inner terminals of $\mathfrak{D}$ has (at least) two inner vertices. Since any two components of $\mathfrak{G}'$ must be associated by Theorem 7, $\mathfrak{H}_1$ contains an inner vertex A which is a terminal of some real bridge. Taking into account the fact that any inner vertex of $\mathfrak{H}_1$ occurs as a terminal of a bridge (Theorem 7), we can separate two cases.

Case 1: $\mathfrak{H}_1$ has three vertices A, B, C such that $P \prec A \prec C \prec B \prec Q$ is valid, there holds at most one of the equalities, A and B are terminals of a pseudo-bridge, C is a terminal of a real bridge. This contradicts either the case $\gamma)$ or (if one of the equalities holds) the case $\beta)$ of Lemma 8.

Case 2: if three vertices A, B, C of $\mathfrak{H}_1$ satisfy $P \prec A \prec C \prec B \prec Q$ and A, B are terminals of the same pseudo-bridge, then C does not occur as a terminal of a real one. This statement can be expressed in the following manner. Let $A_1, A_2, \dots, A_n$ be the inner vertices of $\mathfrak{H}_1$ which occur as terminals of real bridges (according to their ordering on the unique path h of $\mathfrak{H}_1$), let P and Q be denoted by A_0 and A_{n+1} , respectively, too. So there must exist to any pseudo-bridge $\mathfrak{D}$ a chain $h[A_{i-1}A_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$) such that all terminals of $\mathfrak{D}$ are in $h[A_{i-1}A_i]$. If $\mathfrak{D}_\alpha$ denotes a fixed pseudo-bridge, then it is clear that A_{i-1} and A_i terminate a 2-subgraph which contains (at least) the edges of $h[A_{i-1}A_i]$ and $\mathfrak{D}_\alpha$. This contradicts the irreducibility of $\mathfrak{G}$.

COROLLARY 3. *If $\mathfrak{G}'$ is parallel decomposable and A is an inner vertex of $\mathfrak{G}'$, then A is a terminal of some real bridge.*

Having this corollary, the reader can formulate the case (3) of Theorem 9 in a somewhat simpler form.

THEOREM 11. *Let $\mathfrak{G}'$ be series decomposable. Then one of the following two statements holds:*

$\alpha)$ $\mathfrak{G}'$ consists of two edges, $\mathfrak{G}'$ has at least one (pseudo-)bridge, each vertex of $\mathfrak{G}'$ is a terminal of any bridge.

$\beta)$ $\mathfrak{G}'$ consists of at least three edges, $\mathfrak{G}$ has exactly one (pseudo-)bridge, each vertex of $\mathfrak{G}'$ is a terminal of the bridge.

PROOF. If $\mathfrak{G}'$ has two edges, then the further part of $\alpha)$ is implied by the irreducibility of $\mathfrak{G}$. If $\mathfrak{G}'$ has three or more edges, then it is to be proved that $\mathfrak{G}$ has only one bridge. Assume that there are at least two bridges; we distinguish two cases.

Case 1: there are two distinct bridges $\mathfrak{D}_\alpha, \mathfrak{D}_\beta$ such that $P \prec A \prec C \prec B \prec D \prec Q$ is valid for suitable terminals A, B of $\mathfrak{D}_\alpha$ and for suitable ones C, D of $\mathfrak{D}_\beta$. This contradicts Lemma 8.

Case 2: the condition of the preceding case is not fulfilled. We are showing firstly the following fact: there exists a bridge $\mathfrak{D}_\alpha$ and a vertex A of $\mathfrak{G}$ such that A is not a terminal of $\mathfrak{D}_\alpha$. If this statement were false, then each vertex of $\mathfrak{G}'$ would be a terminal of any bridge; since $\mathfrak{G}'$ contains a least four vertices, it would hold the condition of Case 1.

We want to get a contradiction to the irreducibility of $\mathfrak{G}$. Let $\mathfrak{H}$ be the (unique) path of $\mathfrak{G}'$, let B be the last vertex of $h[PA]$ which is a terminal of $\mathfrak{D}_\alpha$, let C be the first vertex of $h[AQ]$ which is a terminal of $\mathfrak{D}_\alpha$. If we regard that the condition defining Case 1 does not hold, it becomes clear that any bridge (different from $\mathfrak{D}_\alpha$) of $\mathfrak{G}$ has all its terminals either beside $h[BC]$ or in $h[BC]$. This means that $\mathfrak{G}$ contains a proper 2-subgraph with the terminals B, C : this subgraph consists of the edges of $h[BC]$ and of the edges of some bridges.

§ 8

Theorems 5—11 have detailed some necessary conditions for the situation of the bridges. The following theorem will express that together these conditions are sufficient too.

THEOREM 12. *Let an arbitrary 2-graph $\mathfrak{G}$ be given. Let $\mathfrak{G}'$ denote a subgraph of $\mathfrak{G}$ which contains the terminals of $\mathfrak{G}$ and has the structure described in the statements (a), (b) of Theorem 5. Let the edges of $\mathfrak{G}$ which are not contained in $\mathfrak{G}'$ be classified as it is exposed in § 5. Let the n -subgraphs according to this classification be called H -graphs. If the H -graphs are strictly connected n -graphs and (after introducing the concepts occurring) Theorems 6—11 preserve the validity for them, then $\mathfrak{G}$ is a strongly connected irreducible 2-graph having the property that a path b of $\mathfrak{G}$ contains a double edge if and only if b has at least one edge which does not belong to $\mathfrak{G}'$.*

PROOF. A) $\mathcal{G}$ is strongly connected. Any edge of $\mathcal{G}'$ is evidently contained in a path. Let k be an edge of a bridge $\mathcal{D}$. It is contained in an inner chain a whose terminals are terminals of $\mathcal{D}$ (cf. the definition of the strictly connected n -graphs). At least one of a and a^{-1} is a direct chain, the further proof coincides with proving the implication $\alpha) \rightarrow \beta)$ in Lemma 6.

B) $\mathcal{G}$ is irreducible. Let A, B be arbitrary distinct vertices of $\mathcal{G}$. (There are the following possibilities in order to choose them: they are vertices of $\mathcal{G}'$, — inner vertices of some bridge, — inner vertices of two bridges, — one of them belongs to $\mathcal{G}'$ and the other is an inner vertex of a bridge.) Let us form the subgraphs of G in accordance with Lemma 1, taking $\{A, B\}$ as α . Theorems 7, 10 and 11 ensure that any formed subgraph either consists of one edge or has at least three terminals. (If there exists an edge between A and B , then this edge itself is a subgraph. The other edges form one or two subgraphs; the second of these cases can occur only if A and B belong to $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}'$ consists of two parallel components and A, B are inner vertices of distinct components, in this case P and Q are in different subgraphs.)

C) If a path contains an edge beside $\mathcal{G}'$, then it contains a double edge by Theorem 6. (We must consider a subchain of the path which is a direct chain of a bridge.)

D) No edge of $\mathcal{G}'$ is a double one. Suppose the contrary. Let $k(AB)$ be an edge of $\mathcal{G}'$ such that $k - a[AB] = b^{-1}[AB]$ where a is the path of $\mathcal{G}'$ containing k and b is a suitable path of $\mathcal{G}$. Let the ordering relation $\prec$ be defined for the vertices of $\mathcal{G}'$ occurring in b ; let $X \prec Y$ be valid if X precedes Y in b . Let C be the first vertex of b such that there exists a vertex X satisfying both of $X \prec C$ and $C \prec X$. Let D be the last vertex of b which lies in the chain $g[PC]$ where g is the unique path of $\mathcal{G}'$ containing C . Evidently, $C \prec D$. The edge of b immediately preceding C is an edge of some bridge, the same is true for the edge of b following D immediately. Let us consider the chains $b[EC]$ and $b[DF]$ which are uniquely determined by the assumption that E and F belong to $\mathcal{G}'$ and their no inner vertex is contained in $\mathcal{G}'$. The definitions of C and D assure that each of $F \prec C$, $D \prec E$ and $F \prec E$ is false. So the existence of $b[EC]$ and $b[DF]$ contradicts either Theorem 8 or Lemma 8. The proof becomes complete by the remark that Lemma 8 follows from Theorem 9 by Lemma 9.

§ 9

In this § we consider (in general) reducible 2-graphs.

It can arise the question what is the criterion in order that an edge of an arbitrary 2-graph $\mathfrak{G}$ should be a double one, if we know the irreducible 2-graphs occurring in the decomposition of $\mathfrak{G}$ due to TRACHTENBROT. This problem can be elucidated successively by the evident

THEOREM 13. *Let us consider the 2-graph $\mathfrak{G}^*$, let the edges of $\mathfrak{G}^*$ be denoted by $k_1, \dots, k_n$. Let the 2-graph $\mathfrak{G}_i$ be substituted for the edge k_i (for any i , $1 \leq i \leq n$), let the 2-graph resulting be denoted by $\mathfrak{G}$. An edge k of $\mathfrak{G}_i$ becomes a double edge of $\mathfrak{G}$ if and only if either k is a double edge of $\mathfrak{G}_i$, or k_i is a double edge of $\mathfrak{G}^*$.*

(Received 2 May 1960)

Bibliography

- [1] A. ÁDÁM, Kétpólusú elektromos hálózatokról. I. (Über zweipolige elektrische Netze. I), *MTA Mat. Kut. Int. Közl.*, **2** (1957), pp. 211—218.²¹
- [2] A. ÁDÁM, Kétpólusú elektromos hálózatokról. II, *ibid.*, **3** (1958), pp. 67—79.²¹
- [3] A. ÁDÁM, Kétpólusú elektromos hálózatokról. III, *ibid.*, **3** (1958), pp. 207—218.²¹
- [4] A. ÁDÁM, Kétpólusú elektromos hálózatokról. IV, *ibid.*, **4** (1959), pp. 183—190.²¹
- [5] C. C. ELGOT and J. B. WRIGHT, Series-parallel graphs and lattices, *Duke Math. Journal*, **26** (1959), pp. 325—338.
- [6] D. KÖNIG, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig, 1936).
- [7] Z. PAWLAK, Review of the book „Теория релейно-контактных схем“ by М. А. Гаврилов, *Journal of Symb. Logic*, **21** (1956), p. 331.
- [8] G. POLLÁK, Megjegyzés Ádám A. „Kétpólusú elektromos hálózatokról. II“ c. dolgozatához (Bemerkung zur Arbeit „Über zweipolige elektrische Netze. II“ von A. Ádám), *MTA Mat. Kut. Int. Közl.*, **3** (1958), pp. 81—82.²¹
- [9] JORDAN and C. E. SHANNON, The number of two-terminal series-parallel networks, *Journal Math. Phys.*, **21** (1942), pp. 83—93.
- [10] А. Г. Лунц, Теория многополюсников (Ленинград, 1951). (Abstract of his dissertation for candidate degree.)
- [11] Б. А. Трахтенброт, Синтез неповторных схем, ДАН СССР, **103** (1955), pp. 973—976.
- [12] Б. А. Трахтенброт, К теории неповторных контактных схем, Труды Мат. Инст. им. В. А. Стеклова, **51** (1958), pp. 226—269.

²¹ Hungarian, with Russian and German summaries.

SOME REMARKS ON THE DIMENSION AND ENTROPY OF RANDOM VARIABLES

By

I. CSISZÁR (Budapest)

(Presented by A. RÉNYI)

Let ξ be a real random variable. Let us put

$$(1) \quad \xi_n = \frac{1}{n} [n\xi], \quad \mathbf{P}\left(\xi_n = \frac{k}{n}\right) = \mathbf{P}\left(\frac{k}{n} \leq \xi < \frac{k+1}{n}\right) = p_{nk}.$$

The dimension of ξ is defined as the limit

$$(2) \quad \mathbf{d}(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{H}_0(\xi_n)}{\log n}$$

(provided this exists) where $\mathbf{H}_0(\xi_n)$ denotes the entropy of the discrete random variable $\xi_n = \frac{1}{n} [n\xi]$, as defined by SHANNON:

$$(3) \quad \mathbf{H}_0(\xi_n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_{nk} \log \frac{1}{p_{nk}}$$

(the log is to be understood with respect to the base 2).

If the finite limit

$$(4) \quad \mathbf{H}_d(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{H}_0(\xi_n) - d \log n)$$

exists, we call it the d -dimensional entropy of ξ .

These notions were introduced by A. RÉNYI (see [1], [2]). He proved [2] that if the distribution of ξ is absolutely continuous and $\mathbf{H}_0(\xi_1) = \mathbf{H}_0([\xi]) < +\infty$, then $\mathbf{d}(\xi) = 1$ and

$$\mathbf{H}_1(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log \frac{1}{f(x)} dx,$$

provided that this integral exists. ($f(x)$ denotes the density function of ξ .)

In this paper we investigate the problem whether this theorem of RÉNYI is reversible or not. We shall prove that the distribution of ξ is necessarily absolutely continuous if $\mathbf{H}_0([\xi]) < +\infty$ and $\mathbf{H}_0(\xi_n) - \log n$ does not tend to $-\infty$, and then (and only then) $\mathbf{H}_1(\xi)$ exists (Theorems 1 and 2). But a necessary and sufficient condition for the absolute continuity of the distribution of ξ cannot be given in terms of the asymptotic behaviour of $\mathbf{H}_0(\xi_n)$ (Theorem 4). The results obtained can be generalized also for random vectors (Theorem 5).

THEOREM 1. *If the distribution of a real random variable ξ is not absolutely continuous and $H_0([\xi]) < +\infty$, then*

$$H_0(\xi_n) - \log n \rightarrow -\infty \quad \text{for } n \rightarrow +\infty.$$

PROOF. Since the distribution of ξ is not absolutely continuous, there exists a positive number $\varepsilon > 0$ such that for every $\delta > 0$ there is a finite number of disjoint intervals $I_1, I_2, \dots, I_{r(\delta)}$ for which $\sum_{i=1}^{r(\delta)} \mu(I_i) < \frac{\delta}{2}$ (μ denotes the Lebesgue measure) but $\sum_{i=1}^{r(\delta)} \mathbf{P}(\xi \in I_i) > \varepsilon$. Let $n > \frac{4r(\delta)}{\delta}$ be an arbitrary fixed integer. Let us consider all the intervals $I_j = \left[\frac{k_j}{n}, \frac{k_j+1}{n} \right)$ (the k_j 's are integers) having at least one point common to $\sum_{i=1}^{r(\delta)} I_i$. Their number will be denoted by $s = s(n, \delta)$. Then

$$(5) \quad \sum_{j=1}^s p_{nk_j} = \sum_{j=1}^s \mathbf{P}(\xi \in I_j) \geq \sum_{i=1}^{r(\delta)} \mathbf{P}(\xi \in I_i) > \varepsilon,$$

further, as for each I_i there are at most two I_j 's having a point common to I_i but not contained in it ($i = 1, 2, \dots, r(\delta)$), and therefore there are at most $2r(\delta)$ I_j 's, not contained in $\sum_{i=1}^{r(\delta)} I_i$, we have

$$(6) \quad \frac{s}{n} = \sum_{j=1}^s \mu(I_j) \leq \sum_{i=1}^{r(\delta)} \mu(I_i) + 2r(\delta) \frac{1}{n} < \frac{\delta}{2} + 2r(\delta) \frac{\delta}{4r(\delta)} = \delta.$$

Let us put

$$\sum_{\substack{k=ln \\ k \neq k_1, \dots, k_s}}^{(l+1)n-1} p_{nk} = p'_{il} \quad (p'_{il} \leq p_{il}); \quad \sum_{\substack{k=ln \\ k \neq k_1, \dots, k_s}}^{(l+1)n-1} 1 = \nu_l \quad (\nu_l \leq n).$$

Then, applying Jensen's inequality to the convex function $-\log x$, we obtain

$$\begin{aligned} H_0(\xi_n) - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} p_{nl} \log \frac{1}{p_{nl}} &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{\substack{k=ln \\ k \neq k_1, \dots, k_s}}^{(l+1)n-1} p_{nk} \log \frac{1}{p_{nk}} + \sum_{j=1}^s p_{nk_j} \log \frac{1}{p_{nk_j}} \leq \\ (7) \quad &\leq \sum_{l=-\infty}^{+\infty} p'_{il} \log \frac{\nu_l}{p'_{il}} + \left(\sum_{j=1}^s p_{nk_j} \right) \log \frac{s}{\sum_{j=1}^s p_{nk_j}} \leq \\ &\leq \sum_{l=-\infty}^{+\infty} p'_{il} \log \frac{1}{p'_{il}} + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} p'_{il} \log n + \left(\sum_{j=1}^s p_{nk_j} \right) \log \frac{1}{\sum_{j=1}^s p_{nk_j}} + \left(\sum_{j=1}^s p_{nk_j} \right) \log s. \end{aligned}$$

The function $x \log \frac{1}{x}$ is monotonically increasing for $x \leq \frac{1}{e}$, therefore we have, except for at most two values of l , $p'_{1l} \log \frac{1}{p'_{1l}} \leq p_{1l} \log \frac{1}{p_{1l}}$. Since, further, the maximum of $x \log \frac{1}{x}$ is $\frac{\log e}{e}$ and by (6) $s < \delta n$, we obtain from (7)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0(\xi_n) &\leq \sum_{l=-\infty}^{+\infty} p_{1l} \log \frac{1}{p_{1l}} + 2 \frac{\log e}{e} + \log n \sum_{l=-\infty}^{+\infty} p'_{1l} + \frac{\log e}{e} + \left(\sum_{j=1}^s p_{nk_j} \right) \log \delta n = \\ (8) \quad &= \mathbf{H}_0(\xi_1) + 3 \frac{\log e}{e} + \log n \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} p'_{1l} + \sum_{j=1}^s p_{nk_j} \right) + \left(\sum_{j=1}^s p_{nk_j} \right) \log \delta. \end{aligned}$$

As we have $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} p'_{1l} + \sum_{j=1}^s p_{nk_j} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_{nk} = 1$ and by (5) $\sum_{j=1}^s p_{nk_j} > \varepsilon$, thus we obtain from (8), if $\delta < 1$:

$$(9) \quad \mathbf{H}_0(\xi_n) \leq \mathbf{H}_0(\xi_1) + 3 \frac{\log e}{e} + \log n + \varepsilon \log \delta.$$

As (9) is true for every $n > \frac{4r(\delta)}{\delta}$, we have

$$(10) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{H}_0(\xi_n) - \log n) \leq \mathbf{H}_0(\xi_1) + 3 \frac{\log e}{e} + \varepsilon \log \delta.$$

Here $\mathbf{H}_0(\xi_1) = \mathbf{H}_0([\xi])$ is a finite constant, $\varepsilon > 0$ is fixed and $\delta > 0$ can be chosen arbitrarily small, therefore we have $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{H}_0(\xi_n) - \log n) = -\infty$. Thus Theorem 1 is proved.

THEOREM 2. For all real random variables ξ with $\mathbf{H}_0([\xi]) < +\infty$ there exists the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{H}_0(\xi_n) - \log n)$; it is either finite or equal to $-\infty$.

PROOF. Using the well-known formula $\mathbf{H}_0(\xi, \eta) = \mathbf{H}_0(\eta) + \mathbf{H}_0(\xi|\eta)$ (where $\mathbf{H}_0(\xi, \eta)$ denotes the entropy of the joint distribution of ξ and η and $\mathbf{H}_0(\xi|\eta)$ denotes the conditional entropy of ξ under the condition that the value of η is given) and the inequality $\mathbf{H}_0(\eta) \leq \log N$ (if N is the number of the possible values of η) (see e. g. [1]), we obtain for any two integers k and l

$$(11) \quad \mathbf{H}_0(\xi_k) = \mathbf{H}_0(\xi_l, \xi_k) - \mathbf{H}_0(\xi_l|\xi_k) \leq \mathbf{H}_0(\xi_l) - \log \left[\left\lceil \frac{l}{k} \right\rceil + 2 \right].$$

In fact, if the value of ξ_k is fixed, ξ_l can take on at most $\left\lceil \frac{l}{k} \right\rceil + 2$ different

values, thus $H_0(\xi_l | \xi_k) \leq \log \left(\left\lfloor \frac{l}{k} \right\rfloor + 2 \right)$ and, on the other hand, $H_0(\xi_l, \xi_k) \geq H_0(\xi_l)$.

Now for any fixed $\varepsilon > 0$ we have $\left\lfloor \frac{l}{k} \right\rfloor + 2 \leq (1 + \varepsilon) \frac{l}{k}$ if $\varepsilon \frac{l}{k} \geq 2$; thus from (11) we obtain for $l \geq \frac{2}{\varepsilon} k$

$$H_0(\xi_k) \geq H_0(\xi_l) - \log \left((1 + \varepsilon) \frac{l}{k} \right) = H_0(\xi_l) - \log l - \log k - \log(1 + \varepsilon),$$

i. e.

$$(12) \quad H_0(\xi_k) - \log k \geq H_0(\xi_l) - \log l - \log(1 + \varepsilon) \quad \text{if} \quad l \geq \frac{2}{\varepsilon} k.$$

From (12) we obtain

$$(13) \quad H_0(\xi_k) - \log k \geq \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} (H_0(\xi_l) - \log l) - \log(1 + \varepsilon),$$

whence

$$(14) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (H_0(\xi_k) - \log k) \geq \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} (H_0(\xi_l) - \log l) - \log(1 + \varepsilon).$$

As $\varepsilon > 0$ can be chosen arbitrarily small, the existence of $\lim_{n \rightarrow \infty} (H_0(\xi_n) - \log n)$ follows from (14). From (13) we obtain that this limit cannot be greater than $H_0(\xi_1) - \log 1 = H_0([\xi]) < +\infty$. Thus Theorem 2 is proved.

REMARK. For the existence of the one-dimensional entropy of ξ by Theorem 2 it is sufficient (and necessary) that $\lim_{n \rightarrow \infty} (H_0(\xi_n) - \log n) > -\infty$. In this case the distribution of ξ is by Theorem 1 absolutely continuous.

THEOREM 3. If the distribution of ξ is absolutely continuous, and $H_0([\xi]) < +\infty$, then, denoting by $f(x)$ the density function of ξ , we have

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (H_0(\xi_n) - \log n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log \frac{1}{f(x)} dx = \mathfrak{J}.$$

REMARK. In the case when $\mathfrak{J}$ is finite (15) was proved by A. RÉNYI [2]. His proof could be applied, with some changes, also in the case $\mathfrak{J} = -\infty$. Here we modify somewhat this proof, so that the separation of the cases $\mathfrak{J} > -\infty$ and $\mathfrak{J} = -\infty$ becomes unnecessary and the proof is shorter also in the case when $\mathfrak{J}$ is finite.

PROOF. The integral $\mathfrak{J}$ cannot be meaningless or equal to $+\infty$. In fact, let us put $E = \{x : f(x) < 1\}$, $I_l = \{x : l \leq x < l+1\}$. Then by Jensen's in-

equality, generalized for integrals, we obtain

$$(16) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) \log \frac{1}{f(x)} \right|_+ dx = \int_E f(x) \log \frac{1}{f(x)} dx = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{EI_l} f(x) \log \frac{1}{f(x)} dx \leq \\ \leq \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{EI_l} f(x) dx \right) \log \frac{\mu(EI_l)}{\int_{EI_l} f(x) dx} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{EI_l} f(x) dx \right) \log \frac{1}{\int_{EI_l} f(x) dx}$$

($|x|_+$ and $|x|_-$ denote the positive and negative parts of x , respectively, $x = |x|_+ - |x|_-$).

Here is $\int_{EI_l} f(x) dx \leq \int_{I_l} f(x) dx = p_{I_l}$. Using that the function $x \log \frac{1}{x}$ is increasing for $x \leq \frac{1}{e}$ and $p_{I_l} \leq \frac{1}{e}$ except at most for two values of l and the maximum of $x \log \frac{1}{x}$ is $\frac{\log e}{e}$, we obtain from (16)

$$(17) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) \log \frac{1}{f(x)} \right|_+ dx \leq \sum_{l=-\infty}^{+\infty} p_{I_l} \log \frac{1}{p_{I_l}} + 2 \frac{\log e}{e} = H_0([f]) + 2 \frac{\log e}{e} < +\infty.$$

This shows that $\mathfrak{J}$ cannot be meaningless or equal to $+\infty$. Now let us put

$$(18) \quad g_n(x) = np_{n,k} \log \frac{1}{np_{n,k}} = \left(\left(\frac{1}{n} \right)^{-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \right) \log \frac{1}{\left(\frac{1}{n} \right)^{-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx}$$

$$\text{for } \frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n},$$

then

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x) \log \frac{1}{f(x)} \quad \text{almost everywhere.}$$

Therefore we have by the theorem of Lebesgue (using that $g_n(x) \leq \frac{\log e}{e}$)

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^{+L} |g_n(x)|_+ dx = \int_{-L}^{+L} \left| f(x) \log \frac{1}{f(x)} \right|_+ dx,$$

and by the lemma of Fatou

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^{+L} |g_n(x)| dx \geq \int_{-L}^{+L} \left| f(x) \log \frac{1}{f(x)} \right| dx$$

for any positive integer L .

Subtracting (21) from (20) we get

$$(22) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^{+L} g_n(x) dx \leq \int_{-L}^{+L} f(x) \log \frac{1}{f(x)} dx.$$

Let us choose $L_0 = L_0(\varepsilon)$ so that $\sum_{l < -L_0 \text{ or } l \geq L_0} p_{1l} \log \frac{1}{p_{1l}} < \varepsilon$ (this is possible for any $\varepsilon > 0$, since $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} p_{1l} \log \frac{1}{p_{1l}} = H_0([\xi]) < +\infty$).

Then, using that by Jensen's inequality $\sum_{k=l_n}^{(l+1)n-1} p_{nk} \log \frac{1}{np_{nk}} \leq p_{1l} \log \frac{1}{p_{1l}}$, we have for $L \geq L_0$

$$(23) \quad \int_{-L}^{+L} g_n(x) dx = \sum_{k=-Ln}^{Ln-1} p_{nk} \log \frac{1}{np_{nk}} \geq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_{nk} \log \frac{1}{np_{nk}} - \varepsilon = H_0(\xi_n) - \log n - \varepsilon.$$

From (22) and (23) we obtain

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (H_0(\xi_n) - \log n) - \varepsilon \leq \int_{-L}^{+L} f(x) \log \frac{1}{f(x)} dx \quad \text{for every } L \geq L_0$$

thus

$$(24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (H_0(\xi_n) - \log n) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log \frac{1}{f(x)} dx + \varepsilon.$$

Here $\varepsilon > 0$ is arbitrary, therefore we have

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (H_0(\xi_n) - \log n) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log \frac{1}{f(x)} dx = \mathfrak{S}.$$

On the other hand, by Jensen's inequality for integrals,

$$\begin{aligned}
 \xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log \frac{1}{f(x)} dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) \log \frac{1}{f(x)} dx \\
 &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \right) \log \frac{1}{\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_{nk} \log \frac{1}{p_{nk}} = H_0(\xi_n) - \log n.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

(25) and (26) prove (15).

REMARK. Theorem 3 combined with Theorem 1 gives a new proof for Theorem 2. Compared with the proof thus obtained the original proof of Theorem 2 has the advantage of being completely elementary.

Now we turn to prove that Theorem 1 cannot be sharpened in the sense that $H_0(\xi_n) - \log n$ can tend to $-\infty$ arbitrarily slowly for a suitable ξ with a not absolutely continuous distribution. Hence, as by Theorem 3 $H_0(\xi_n) - \log n \rightarrow -\infty$ is possible also in the absolutely continuous case

(namely when $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log \frac{1}{f(x)} dx = -\infty$), it will follow that in terms of the

asymptotic behaviour of $H_0(\xi_n)$ no necessary and sufficient condition can be given for the absolute continuity of the distribution of ξ .

THEOREM 4. If c_n ($n = 1, 2, \dots$) is an arbitrary sequence of real numbers for which $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$, then there exists a real random variable ξ , with values in the interval $[0, 1)$ having a singular distribution, such that $H_0(\xi_n) - \log n > -c_n$ for any sufficiently large n .

PROOF. We shall use a construction used by A. RÉNYI for a similar purpose (see [2], p. 195). Let $a_1, a_2, \dots$ be a sequence of positive integers which will be specified later and $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$. We define a measure ν corresponding to the sequence $\{a_i\}$ on the subintervals of $I = [0, 1)$, having the form

$\left[\frac{k}{2^{s_n}}, \frac{k+1}{2^{s_n}} \right)$ ($n=1, 2, \dots; k=0, 1, \dots, 2^{s_n}-1$) by putting

$$(27) \quad \nu \left[\frac{k}{2^{s_1}}, \frac{k+1}{2^{s_1}} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } k=0 \text{ or } k=2^{s_1}-1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\nu \left[\frac{k}{2^{s_n}}, \frac{k+1}{2^{s_n}} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{if } k=l \cdot 2^{s_n} \text{ or } (l+1)2^{s_n}-1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \text{where } \nu \left[\frac{l}{2^{s_{n-1}}}, \frac{l+1}{2^{s_{n-1}}} \right) = \frac{1}{2^{n-1}},$$

Let us extend this measure in the usual way to all Borel subsets of $I=[0, 1)$ and denote by $\xi^{(r)}$ a random variable with the distribution function $F(x)=\nu[0, x)$. It is easy to show that if there are infinitely many a_i 's different from 1, the distribution function $F(x)$ of ξ is singular.

As $\xi_{2^{s_n}}^{(r)} = \frac{1}{2^{s_n}} [2^{s_n} \xi^{(r)}]$ takes on 2^n different values, each with the probability $\frac{1}{2^n}$, we have by (3)

$$(28) \quad H_0(\xi_{2^{s_n}}^{(r)}) = 2^n \frac{1}{2^n} \log 2^n = n.$$

Further, applying (12) with $\varepsilon=2$ we obtain that

$$(29) \quad H_0(\xi_k^{(r)}) - \log k \geq H_0(\xi_l^{(r)}) - \log l - \log 3 \quad \text{if } l \geq k.$$

Let us choose the sequence $\{a_i\}$ to contain infinitely many $a_i > 1$, so that for sufficiently large n ($n \geq n_0$)

$$(30) \quad s_n - n = \sum_{i=1}^n (a_i - 1) < \min_{i \geq 2^{s_{n-1}}} c_i - \log 3$$

(this is always possible, since $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$).

Then, if $2^{s_{n-1}} < k < 2^{s_n}$ where $n \geq n_0$, we have by (29), (28) and (30)

$$(31) \quad \begin{aligned} H_0(\xi_k^{(r)}) - \log k &\geq H_0(\xi_{2^{s_n}}^{(r)}) - \log 2^{s_n} - \log 3 = n - s_n - \log 3 > \\ &> - \min_{i \geq 2^{s_{n-1}}} c_i \geq -c_k. \end{aligned}$$

Thus Theorem 4 is proved.

The results obtained can be generalized to random vectors. Let $\vec{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r)$ be a random r -dimensional vector. Let us put

$$(32) \quad \vec{\xi}_n = \left(\frac{1}{n} [n\xi^1], \frac{1}{n} [n\xi^2], \dots, \frac{1}{n} [n\xi^r] \right),$$

$$\mathbf{P} \left(\vec{\xi}_n \in \left(\frac{k^{(1)}}{n}, \frac{k^{(2)}}{n}, \dots, \frac{k^{(r)}}{n} \right) \right) = \mathbf{P} \left(\frac{k^{(1)}}{n} \leq \xi^1 \leq \frac{k^{(1)}+1}{n}, \dots, \frac{k^{(r)}}{n} \leq \xi^r \leq \frac{k^{(r)}+1}{n} \right) \\ = p_{n; k^{(1)}, \dots, k^{(r)}}.$$

Suppose that $\mathbf{H}_0(\vec{\xi}_1) < +\infty$.

If the distribution of $\vec{\xi}$ is not absolutely continuous, then there exists an $\varepsilon > 0$ such that for every $\delta > 0$, $n \geq n_0(\delta)$ there can be found intervals of the form

$$I_j = \left\{ (x^1, \dots, x^r) : \frac{k_j^{(1)}}{n} \leq x^1 \leq \frac{k_{j+1}^{(1)}}{n}, \dots, \frac{k_j^{(r)}}{n} \leq x^r \leq \frac{k_{j+1}^{(r)}}{n} \right\}$$

(n and the $k_j^{(i)}$'s are integers, $j = 1, 2, \dots, s = s(\delta, n)$) for which

$$(33) \quad \sum_{j=1}^s \mu(I_j) \leq \frac{s}{n^r} < \delta \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^s \mathbf{P}(\vec{\xi} \in I_j) = \sum_{j=1}^s p_{n; k_j^{(1)}, \dots, k_j^{(r)}} \geq \varepsilon.$$

(In fact, by definition there exist such disjoint intervals $I'_1, I'_2, \dots, I'_{r(\delta)}$ that $\sum_{i=1}^{r(\delta)} \mu(I'_i) < \frac{\delta}{2}$ and $\sum_{i=1}^{r(\delta)} \mathbf{P}(\vec{\xi} \in I'_i) \geq \varepsilon$. For sufficiently large n the set $\sum_{i=1}^{r(\delta)} I'_i$ can be covered with intervals I_j of the desired form ($j = 1, 2, \dots, s$) so that $\sum_{j=1}^s \mu(I_j) < 2 \sum_{i=1}^{r(\delta)} \mu(I'_i)$ and for this I_j 's (33) holds.)

Using (33) we obtain similarly to Theorem 1 that $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{H}_0(\vec{\xi}_n) - r \log n) = -\infty$. Theorems 2 and 3 and their proofs can also be carried over to the r -dimensional case with obvious changes.

The construction in the proof of Theorem 4 must be modified as follows: Let us choose a sequence of positive integers $\{a_n\}$ containing infinitely many $a_i > 1$ so that for every $n \geq n_0$

$$s_n - n < \frac{1}{r} \min_{i \leq 2^{s_{n-1}}} c_i - \log 3.$$

We denote by ν^i the measure on the Borel subsets of the interval $[0, 1)$ of the axis x^i , corresponding to the sequence $\{a_n\}$ by the construction in the proof of Theorem 4. Then $\nu = \nu^1 \times \nu^2 \times \dots \times \nu^r$ is a measure defined on the Borel subsets of the unit cube and if $\vec{\xi}$ is a random vector with $\mathbf{P}(\vec{\xi} \in A) = \nu(A)$ (for any

Borel subset A of the unit cube), then ξ_i has a singular distribution and we obtain similarly to the proof of Theorem 4 that

$$\mathbf{H}_0(\tilde{\xi}_n) - r \log n > -c_n \quad \text{for every } n > 2^{n_0-1}.$$

Thus we have

THEOREM 5. For any random r -dimensional vector $\tilde{\xi}$ with $\mathbf{H}_0(\tilde{\xi}_1) < +\infty$ there exists $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{H}_0(\tilde{\xi}_n) - r \log n)$. This limit is equal to $-\infty$ if the distribution of $\tilde{\xi}$ is not absolutely continuous and equal to

$$\mathfrak{J} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x^1, x^2, \dots, x^r) \log \frac{1}{f(x^1, x^2, \dots, x^r)} dx^1 dx^2 \cdots dx^r$$

if the distribution of $\tilde{\xi}$ is absolutely continuous with the density function $f(x^1, x^2, \dots, x^r)$ ($-\infty \leq \mathfrak{J} < +\infty$). Further, for any sequence of real numbers $c_n \rightarrow +\infty$ there exists a bounded random vector $\tilde{\xi}_n$ with singular distribution for which $\mathbf{H}_0(\tilde{\xi}_n) - r \log n > -c_n$ for every sufficiently large n .

I wish to express my thanks to professor A. RÉNYI for his kindness reading through the manuscript and giving me valuable advices.

(Received 4 May 1960)

References

- [1] J. BALATONI and A. RÉNYI, Remarks on entropy (in Hungarian with English and Russian summaries), *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **1** (1956), pp. 9—40. German translation under the title „Über den Begriff der Entropie“ in the collection of papers: „Arbeiten zur Informationstheorie. I“ (*Math. Forschungsberichte. IV*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957, pp. 117—134.)
- [2] A. RÉNYI, On the dimension and entropy of probability distributions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **10** (1959), pp. 193—215.

НОРМАЛЬНЫЙ ПОРЯДОК АДДИТИВНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА МНОЖЕСТВЕ "СДВИНУТЫХ" ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

М. Б. БАРБАН (Ташкент, СССР)

(Представлено П. Тураном)

Харди и Рамануджан [1] ввели понятие о нормальном порядке арифметической функции, заданной на некотором множестве чисел.

Пусть $f(m)$ — функция, заданная на некотором множестве M целых положительных чисел, $Q(n)$ — количество чисел этого множества, не превосходящих n , $g(n)$ — возрастающая функция. Обозначим через $N(n)$ количество чисел множества M , не превосходящих n и обладающих свойством

$$(1-\varepsilon)g(n) < f(m) < (1+\varepsilon)g(n).$$

Мы говорим, что $g(n)$ есть нормальный порядок функции $f(m)$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{Q(n)} = 1$ для любых достаточно малых положительных ε .

Приведенное определение, хотя и несколько отличается от определения Харди и Рамануджана, по существу совпадает с последним, когда $g(n)$ — медленно растущая функция, а множество M — не слишком редкое (например, если $Q(n) > n^\varepsilon$).

В упомянутой статье Харди и Рамануджан доказали, что $\ln \ln n$ является нормальным порядком функции $\nu(m) = \sum_{p|m} 1$ на множестве всех натуральных чисел и на множестве бесквадратных чисел.

С тех пор этот результат был обобщен различными авторами в различных направлениях.

Эрдёш [2], используя метод Харди и Рамануджана и остроумным образом полученную им оценку сверху для количества простых чисел, не превосходящих n и удовлетворяющих условию $\nu(p-1) = K$, доказал, что $\ln \ln n$ является нормальным порядком функции $\nu(m)$ на множестве чисел вида $p-1$.

Туран [3] дал новое доказательство теоремы Харди и Рамануджана и обобщил ее на широкий класс других арифметических функций, заданных на множестве всех натуральных чисел, а для функции $\nu(m)$ доказал аналогичный результат для множества чисел, являющихся значениями целочисленного неприводимого полинома в области всех натуральных чисел

Кубилюс [4], применяя метод Турана, доказал аналогичную теорему для всех сильно аддитивных $(f(m) = \sum_{p|m} f(p))$ арифметических функций, заданных в области всех натуральных чисел.

Метод Турана основывался на оценке средне-квадратического отклонения арифметической функции от своего среднего значения (т. е. дисперсии, если пользоваться терминологией теории вероятностей).

Однако непосредственное применение метода Турана к задаче Эрдёша и к ее обобщению на другие арифметические функции очевидным образом упирается в серьезные, подчас проблематичные сведения о распределении простых чисел в прогрессиях с растущим модулем.

Если же использовать простое свойство дисперсии не уменьшаться, когда множество чисел, на котором задана функция, заменяется на объемлющее (ср. Линник [5]), то для наших целей было бы достаточно найти такую "оболочку" над множеством простых чисел, чтобы для количества ее чисел в интервале $(1, n)$ выполнялось неравенство $O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$, и чтобы вопросы распределения чисел этой "оболочки" в прогрессиях с растущим модулем уже не были проблематичными.

Но такой "оболочкой" как раз и являются числа $m \leq n$, не делящиеся на простые, не превосходящие $n^{\frac{1}{\alpha}}$ для растущих α , что доказывается методом Бруна. То, что решето Бруна дает асимптотическое равенство для количества чисел $m \leq n$, которые остаются после отсеивания из них чисел, принадлежащих некоторым фиксированным классам вычетов по простым модулям, не превосходящим $n^{\frac{1}{\alpha}}$ ($\alpha = \alpha(n) \rightarrow \infty$), факт — широко используемый в вероятностной теории чисел (см [4], интересно сравнить с [6]).

Таким образом, на основе лишь элементарного метода появляется возможность обобщения теоремы Эрдёша, а именно, имеет место следующая

Теорема. Пусть $f(m)$ — неотрицательная сильно аддитивная арифметическая функция,

$$A_n = \sum_{p \leq n} f(p), \quad A_n = \max_{p \leq n} f(p), \quad A_n \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad A_n = o(A_n) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда A_n — нормальный порядок $f(m)$.

Нам понадобится несколько лемм.

Лемма 1. Пусть $(k, l) = 1$. Обозначим через $\pi_1(k, n, n^{\frac{1}{\alpha}})$ количество чисел прогрессии $km + l$, не превосходящих n и не делящихся на простые, меньшие или равные $n^{\frac{1}{\alpha}}$. Тогда для достаточно больших, но фиксиро-

ванных α , и всех $k \leq n^\delta$ ($\delta = \delta(\alpha)$), при $n \geq n_0(\alpha)$

$$\pi_l(k, n, n^{\frac{1}{\alpha}}) = \frac{n}{\varphi(k)} \prod_{p \leq n^{1/\alpha}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \theta \frac{e^{-\alpha \ln \alpha} n}{\varphi(k) \ln n},$$

где через θ здесь и в дальнейшем будет обозначена величина, по абсолютному значению меньшая 1, не обязательно одна и та же на протяжении всего изложения.

Доказательство проводится методом решета Бруна (см., например, [7]).

Лемма 2. В условиях и обозначениях предыдущей леммы

$$\pi_l(k, n, n^{\frac{1}{\alpha}}) < c_1(\alpha) \frac{n}{\varphi(k) \ln n}.$$

Лемма является очевидным следствием предыдущей.

Лемма 3. Обозначим через $M_l(a, n, n^{\frac{1}{\alpha}})$ число решений неопределенного уравнения $y_1 - l = ay_2$ в натуральных числах y_1, y_2 , не превосходящих n и не делящихся на простые, меньшие или равные $n^{\frac{1}{\alpha}}$. Тогда, если $a \leq n^\sigma$, $\sigma = \sigma(\alpha) < 1$, то

$$M_l(a, n, n^{\frac{1}{\alpha}}) < c_2(\alpha) \frac{n}{\varphi(a) \ln^2 n} \prod_{p|a} \left(1 + \frac{2}{p}\right).$$

Это неравенство, очевидно, также доступно методу решета в форме Бруна или Сельберга.

Лемма 4.

$$\sum_{a \leq n} \frac{\prod_{p|a} \left(1 + \frac{2}{p}\right)}{\varphi(a)} = O(\ln n).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_{a \leq n} \frac{\prod_{p|a} \left(1 + \frac{2}{p}\right)}{\varphi(a)} &= O\left(\sum_{a \leq n} \frac{\prod_{p|a} \left(1 + \frac{3}{p}\right)}{a}\right) = \\ &= O\left(\sum_{a \leq n} \frac{1}{a} \sum_{d|a} \mu^2(d) \frac{3^{v(d)}}{d}\right) = O\left(\sum_{d \leq n} \frac{\mu^2(d)}{d} 3^{v(d)} \sum_{\substack{a \equiv 0(d) \\ a \leq n}} \frac{1}{a}\right) = \\ &= O\left(\ln n \sum_{d \leq n} 3^{v(d)} \frac{\mu^2(d)}{d^2}\right) = O\left(\ln n \prod_p \left(1 + \frac{3}{p^2}\right)\right) = O(\ln n). \end{aligned}$$

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы.

Очевидно, теорема является следствием следующей оценки дисперсии:

$$(1) \quad D = \sum_{p \leq n} (f(p-l) - A_n)^2 = o\left(\frac{n}{\ln n} A_n^2\right).$$

Но

$$(2) \quad D \leq \sum_{p \leq n} (f(p-l) - A_n)^2 = \sum_{p \leq n} f^2(p-l) - 2A_n \sum_{p \leq n} f(p-l) + A_n^2 \sum_{p \leq n} 1,$$

где p пробегает числа, не делящиеся на простые, не превосходящие $n^{\frac{1}{\delta}}$.

Оценим суммы в правой части (2).

$$\sum_{p \leq n} f^2(p-l) = \sum_{p \leq n} f^2(p) \sum_{\substack{p-l \equiv 0 \pmod{p} \\ p-l \leq n}} 1 + \sum_{\substack{pq \leq n \\ p \neq q}} f(p)f(q) \sum_{\substack{p-l \equiv 0 \pmod{pq} \\ p-l \leq n}} 1 = \sum' + \sum''.$$

Далее

$$\sum' = \sum_{p \leq n^{\frac{1}{\delta}}} f^2(p) \sum_{\substack{p-l \equiv 0 \pmod{p} \\ p-l \leq n}} 1 + \sum_{n^{\frac{1}{\delta}} < p \leq n} f^2(p) \sum_{\substack{p-l \equiv 0 \pmod{p} \\ p-l \leq n}} 1 = \sum'_1 + \sum'_2.$$

Применяя к $\sum'_1$ лемму 2, получим

$$\sum'_1 = O\left(\frac{n}{\ln n} \sum_{p \leq n^{\frac{1}{\delta}}} \frac{f^2(p)}{p-1}\right) = O\left(\frac{n}{\ln n} A_n\right) = o\left(A_n^2 \frac{n}{\ln n}\right).$$

К $\sum'_2$ применим леммы 3 и 4:

$$\begin{aligned} \sum'_2 &= O\left(A_n^2 \sum_{n^{\frac{1}{\delta}} < p \leq n} \sum_{\substack{p-l \equiv 0 \pmod{p} \\ p-l \leq n}} 1\right) = O\left(A_n^2 \sum_{\substack{p-l \equiv 0 \pmod{p} \\ p-l \leq n \\ n^{\frac{1}{\delta}} < p \leq n}} 1\right) \\ &= O\left(A_n^2 \sum_{n^{\frac{1}{\delta}} < p \leq n} M_l(a, n, n^{\frac{1}{\delta}})\right) = O\left(A_n^2 \frac{n}{\ln^2 n} \sum_{n^{\frac{1}{\delta}} < p \leq n} \frac{M_l\left(1 + \frac{2}{p}\right)}{q(a)}\right) = o\left(A_n^2 \frac{n}{\ln n}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum' = o\left(\frac{n}{\ln n} A_n^2\right).$$

Теперь оценим $\sum''$:

$$\sum'' = \sum_{\substack{pq \leq n^{\frac{1}{\delta}} \\ p \neq q}} f(p)f(q) \sum_{\substack{p-l \equiv 0 \pmod{pq} \\ p-l \leq n}} 1 + \sum_{n^{\frac{1}{\delta}} < pq \leq n} f(p)f(q) \sum_{\substack{p-l \equiv 0 \pmod{pq} \\ p-l \leq n}} 1 = \sum''_1 + \sum''_2.$$

$\sum''_2$ оценивается точно также, как $\sum'_2$. Таким образом,

$$\sum''_2 = o\left(\frac{n}{\ln n} A_n^2\right).$$

К $\sum_1''$ применим лемму 1:

$$\sum_1'' = n \prod_{p \leq n^{1/\alpha}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{pq \leq n^\delta \\ p \neq q}} \frac{f(p)f(q)}{\varphi(pq)} + \theta \frac{n}{\ln n} e^{-\alpha \ln \alpha} \sum_{\substack{pq \leq n^\delta \\ p \neq q}} \frac{f(p)f(q)}{\varphi(pq)} + O(1)$$

(последнее за счет pq , не взаимно-простых с 1).

Так как

$$\sum_{\substack{pq \leq n^\delta \\ p \neq q}} \frac{f(p)f(q)}{\varphi(pq)} \leq 4 \left(\sum_{p \leq n^\delta} \frac{f(p)}{p} \right)^2,$$

то

$$\sum_1'' = n \prod_{p \leq n^{1/\alpha}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{pq \leq n^\delta \\ p \neq q}} \frac{f(p)f(q)}{\varphi(pq)} + 4\theta \frac{n}{\ln n} e^{-\alpha \ln \alpha} A_n^2 + O(1).$$

Теперь, собирая все оценки, получим

$$(3) \quad \sum_{r-l \leq n} f^2(r-l) = n \prod_{p \leq n^{1/\alpha}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{pq \leq n^\delta \\ p \neq q}} \frac{f(p)f(q)}{\varphi(pq)} + \\ + 4\theta \frac{n}{\ln n} e^{-\alpha \ln \alpha} A_n^2 + o\left(\frac{n}{\ln n} A_n^2\right).$$

Точно также мы можем оценить $\sum_{r-l \leq n} f(r-l)$.

$$(4) \quad \sum_{r-l \leq n} f(r-l) = n \prod_{p \leq n^{1/\alpha}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{p \leq n^\delta} \frac{f(p)}{\varphi(p)} + \\ + 2\theta \frac{n}{\ln n} e^{-\alpha \ln \alpha} A_n + o\left(\frac{n}{\ln n} A_n\right).$$

Подставляя (3), (4) в (2) и применяя лемму 1 при $k=1$ для оценки

$\sum_{r-l \leq n} 1$, получим

$$D \leq n \prod_{p \leq n^{1/\alpha}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left[\sum_{\substack{pq \leq n^\delta \\ p \neq q}} \frac{f(p)f(q)}{\varphi(pq)} - 2A_n \sum_{p \leq n^\delta} \frac{f(p)}{\varphi(p)} + A_n^2 \right] + \\ + 10\theta \frac{n}{\ln n} e^{-\alpha \ln \alpha} A_n^2 + o\left(\frac{n}{\ln n} A_n^2\right).$$

Так как $\prod_{p \leq n^{1/\alpha}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) < \frac{c_\alpha(\alpha)}{\ln n}$, а выбирая α достаточно большим можно выражение $e^{-\alpha \ln \alpha}$ сделать произвольно малым, то для завершения доказа-

тельства достаточно показать, что

$$(5) \quad W = \sum_{\substack{pq \leq n^\delta \\ p \neq q}} \frac{f(p)f(q)}{\varphi(pq)} - 2A_n \sum_{p \leq n^\delta} \frac{f(p)}{\varphi(p)} + A_n^2 = o(A_n^2).$$

Но, во-первых

$$(6) \quad \sum_{\substack{pq \leq n^\delta \\ p \neq q}} \frac{f(p)f(q)}{\varphi(pq)} \leq \left(\sum_{p \leq n^\delta} \frac{f(p)}{\varphi(p)} \right)^2.$$

Во-вторых, применяя хорошо известную оценку $\sum_{p < y} \frac{1}{p} = \ln \ln y + O(1)$, имеем

$$(7) \quad \sum_{p \leq n^\delta} \frac{f(p)}{\varphi(p)} = \sum_{p \leq n^\delta} \frac{f(p)}{p} + \sum_{p \leq n^\delta} f(p) \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) = \sum_{p \leq n^\delta} \frac{f(p)}{p} + O(A_n) = \\ = A_n + O \left(A_n \sum_{n^\delta < p < n} \frac{1}{p} \right) + O(A_n) = A_n + o(A_n).$$

Теперь подстановка (6) и (7) в выражение для W (5) завершает доказательство теоремы.

(Поступило 6. V. 1960.)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] G. H. HARDY and L. RAMANUJAN, The normal number of prime factors of a number n , *Quart. Journ. Math.*, **48** (1917), стр. 76—92.
- [2] P. ERDŐS, On the normal number of prime factors of $p-1$ and some related problems concerning Euler's φ -function, *Quart. Journ. Math.*, Oxford series, **6** (1935), стр. 205—213.
- [3] P. TURÁN, Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan, *Journal London Math. Soc.*, **11** (1936), стр. 125—133.
- [4] И. П. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Усп. Мат. Наук, **11** (1956), вып. 2 (68), стр. 31—66.
- [5] Ю. В. Линник, Проблема Харди—Литлвуда о сложении простых чисел и двух квадратов, ДАН СССР, **124** (1959), № 1, стр. 29—30.
- [6] C. HOOLEY, On the representation of a number as the sum of two squares and a prime, *Acta Math.*, **97** (1957), стр. 189—210.
- [7] А. А. Бухштаб, Об асимптотической оценке числа чисел арифметической прогрессии, не делящихся на “относительно” малые простые числа, Мат. Сборник, **28** (70) (1951), стр. 165—184.

ON THE NORMAL ORDER OF ADDITIVE ARITHMETIC FUNCTIONS

By

M. B. BARBAN (Taskent, USSR)

(Summary)

The aim of the present paper is the proof of the following theorem:

If $f(m)$ is a non-negative strongly additive $\left(f(m) = \sum_{p|m} f(p)\right)$ arithmetic function,

$$A_n = \sum_{p \leq n} \frac{f(p)}{p}, \quad A_n = \max_{p \leq n} f(p), \quad A_n \rightarrow \infty \quad \text{and} \quad A_n = o(A_n),$$

then A_n is the normal order of $f(n)$.

The method used in this paper is similar to those of TURÁN [3] and LINNIK [5].

ÜBER RINGE MIT MINIMALBEDINGUNG FÜR HAUPTRECHTSIDEALE. II

Von
F. SZÁSZ (Budapest)
(Vorgelegt von L. RÉDEI)

Professor L. RÉDEI zu seinem 60. Geburtstag gewidmet

§ 1. Einleitung¹

Die im Titel erwähnten Ringe werden kurz *MHR*-Ringe genannt, die schon in unserer Arbeit [26] untersucht worden sind. Unter einem Ring verstehen wir immer einen assoziativen Ring, unter dem Radikal das Jacobsonsche Radikal, unter einem halbeinfachen Ring einen Ring mit dem Radikal (0). Für die Grundbegriffe verweisen wir auf [13], ferner auf [1], [4], [7] und [21]. Unter einem *MH₁R*-Ring verstehen wir einen Ring mit Minimalbedingung für die in Hauptidealsidealen liegenden Rechtsideale. Hiernach ist jeder Artinsche Ring (d. h. ein Ring mit Minimalbedingung für Rechtsideale) ein *MH₁R*-Ring und jeder *MH₁R*-Ring ist ein *MHR*-Ring, aber die Umkehrungen sind falsch. Ferner wird ein Ring mit Minimalbedingung für Hauptideale (bzw. für die in Hauptidealen liegenden Ideale) kurz *MHI*-Ring (bzw. *MH₁I*-Ring) genannt. Die *MHR*-Ringe mit Maximalbedingung für Hauptidealsideale nennen wir *MMHR*-Ringe. Ein *MHU*-Ring bedeutet aber stets einen Ring mit Minimalbedingung für die durch ein Element erzeugten Unterringe.

Bekanntlich wird ein Ring A im von Neumannschen Sinne regulär genannt, wenn es zu jedem Element $a \in A$ ein $x \in A$ mit $a = axa$ gibt. Ist ferner A ein beliebiger Ring mit einem idempotenten Element e , so wird das Hauptidealsideal $(e)_r = eA$ von A „regelmäßig“ genannt, wenn der Unterring $Q_r = (1-e)AeA(1-e)$ nilpotent ist. Bezeichnet I den Ring der ganzen rationalen Zahlen, so ist $1 \in I$ im Falle $1 \notin A$ ein Operator mit $(1-e)AeA(1-e) = \{aeb - eaeb - aebe + eaebe \mid a, b \in A\}$. Der Unterring Q_r ist ein Quasiideal im Sinne von O. STEINFELD [23]. Bezeichnet e_{ij} die Basiselemente des vollen Matrizenringes $A = (I_r(2))_2$ ($i, j = 1, 2$), so ist $e_{11}A$ wegen $e_{22} \in Q_{r_{11}}$ kein regelmäßiges Hauptidealsideal. Ist aber A kein Nilring und ist A entweder

¹ Diese Arbeit ist ein Teil der Dissertation (1959) des Verfassers. Wir verweisen noch auf [26] und auf die Note [6], die voneinander unabhängig zustande gekommen sind. Vgl. noch F. Szász, A főjobbidéálókra nézve minimum-feltételű gyűrűk, *MTA Mat. és Fiz. Oszt. KözL.*, **11** (1961), S. 135–177, was eine abgekürzte Version der Kandidatsdissertation ist.

ein *MMHR*-Ring oder ein Artinscher Ring, so ist eA mit jedem Hauptidempotent e regelmäßig. Wiederum ist eA in einem beliebigen Ring A regelmäßig, wenn $e(-e^2)$ zum Zentrum von A gehört. Ist nun φ ein Ringhomomorphismus von A in B , so ist mit eA auch $e\varphi \cdot A\varphi$ ebenfalls regelmäßig.

Ist E der volle Endomorphismenring einer beliebigen Abelschen Gruppe M , und $A = A^{(0)}$ ein Unterring von E , so sei $A^{(n+1)}$ der Zentralisator von $A^{(n)}$ bezüglich E für jede natürliche Zahl n . Es gelten immer $A^{(2k-1)} = A^{(1)}$ und $A^{(2k)} = A^{(2)}$ für alle $k \geq 1$. Der kritische Fall ist im allgemeinen $k=0$. Ist nun A die ringtheoretische direkte Summe beliebig vieler einfacher Artinscher Ringe, so gilt auch $A^{(0)} = A^{(2)}$.

Ein A -Rechtsmodul M mit $MA = M$ ist perfekt. Ein vollständig reduzierbarer A -Faktormodul M/K von M wird „ausgezeichnet“ genannt, wenn jeder A -Homomorphismus eines beliebigen vollständig reduzierbaren A -Faktormoduls M/L auf M/K ein Isomorphismus ist. Wir bezeichnen die Menge $\{x | x \in M, x \cdot J^\alpha = 0\}$ mit $K_\alpha(M)$ für einen A -Rechtsmodul M und für jede Ordnungszahl α , wobei J das Radikal von A ist.

Nun werden wir die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammenfassen.

Im § 2 werden das Noethersche und das Wedderburn—Artinsche Kriterium verallgemeinert, ferner Eindeutigkeitsfragen erörtert, bzw. spezielle halbeinfache *MHR*-Ringe charakterisiert. Es werden auch die subdirekten Darstellungen von *MHI*-Ringen, und eine Verallgemeinerung eines Kriteriums von A. KERTÉSZ betrachtet, das die halbeinfachen Artinschen Ringe durch eine Folge von äquivalenten Bedingungen bestimmt hat. Wir verallgemeinern auch ein Harada—Kovácsches Kriterium über die regulären Ringe. Hiernach und nach [26] ist jeder halbeinfache *MHR*-Ring regulär. Wir haben aber einen regulären Ring explizit gegeben, der kein (halbeinfacher) *MHR*-Ring ist.

Im § 3 werden die additiven Gruppen der *MHR*-Ringe, insbesondere der *MHR*-Ringe mit Einselement, der *MHR*-Radikalringe bzw. der primitiven *MHR*-Ringe betrachtet. In einem nilpotenten *MHI*-Ring gilt die Minimalbedingung auch für die in Hauptrechtsidealen liegenden additiven Untergruppen, und jeder Unterring ist ebenfalls ein *MHI*-Ring.

Im § 4 untersuchen wir die Struktur einer Abelschen Gruppe M mit (vollem) *MHR*-Endomorphismenring E . Ist nun der volle Endomorphismenring E von M beliebig, und A ein einfacher *MHR*-Unterring von E , so kann nach einem expliziten Beispiel auch $(A-)A^{(n)} \neq A^{(2)}$ gelten, d. h. der Zentralisator $A^{(2)}$ des Zentralisators $A^{(1)}$ von A bezüglich E ist von A verschieden. Wir werden auch die Operatorenmoduln und die Loewyschen Systeme über *MHR*-Ringe erörtern.

§ 5 untersucht die Zusammenhänge von verschiedenen Typen der Radikale von *MHR*-Ringen. In beliebigen *MHR*-Ringen stimmen das Baer—

McCoysche Radikal B , das Levitzkische Radikal K , das obere Nilradikal N und das Jacobsonsche Radikal J überein. Hat der MHR -Ring ein Rechtseins-element, so stimmen auch das Fuchssche Radikal Z und das Brown—McCoysche Radikal G mit dem Jacobsonschen Radikal J überein. Im all-gemeinen gelten in MHR -Ring en $Z \supset J$ und $G \supset J$, und es können durch spezielle Beispiele auch $Z \neq J$ und $G \neq J$ bestätigt werden.

Im § 6 betrachten wir die $MMHR$ -Ringe und die regelmäßigen Haupt-rechtsideale des Sockels eines Ringes. Hiernach ist jedes Rechtsideal R eines regelmäßigen Hauptrechtsideales, als Ringes, des Sockels A_1 von A ebenfalls ein Rechtsideal in A , und es gilt noch eine Folge der Behauptungen, ins-besondere eine relative Charakterisierung bezüglich der regelmäßigen Haupt-rechtsideale des Sockels eines Ringes.

Im § 7 werden die MHU -Ringe erörtert. Es gibt einen MHU -Ring, der kein MHR -Ring ist, und einen MHR -Ring, der kein MHU -Ring ist. Ist nun A ein MHU -Nilring, der auch ein MHR -Ring ist, so bilden die Elemente von A bezüglich der Verknüpfung $x \cdot y = -x + y - xy$ eine perio-dische verallgemeinerte auflösbare Gruppe G , die das direkte Produkt ihrer Sylowschen p -Untergruppen ist. Die Bedingung, daß jeder endlich erzeugbare echte Unterring von A ein Hauptrechtsideal von A ist, ist hinreichend aber nicht notwendig dafür, daß ein MHR -Ring auch ein MHU -Ring sei, bzw., daß ein MHU -Ring auch ein MHR -Ring sei (vgl. Satz 3 von [25]).²

§ 2. Über halbeinfache MHR -Ringe

Wir haben schon in unserer Arbeit [26] gezeigt, daß jeder halbeinfache MHR -Ring A , als ein A -Rechtsmodul, vollständig reduzibel ist. Diese Ringe A sind auch als zweiseitige (A, A) -Doppelmoduln vollständig reduzibel. Es gilt nun die folgende Behauptung als eine Umkehrung und Ergänzung dieser Tatsachen:

2. 1. *Ist ein Ring A die direkte Summe seiner idempotenten minimalen Rechtsideale, so ist A ein halbeinfacher MHR -Ring. Ein Ring A ist genau dann ein halbeinfacher MHR -Ring, wenn A in die ringtheoretische direkte Summe von einfachen MHR -Ring en zerlegt werden kann. Diese letztere Zerlegung ist bis auf Isomorphie und Permutation eindeutig.*

Nach [26] ist nämlich A , als die direkte Summe idempotenter mini-maler Rechtsideale, auch als ein (A, A) -Doppelmodul vollständig reduzibel. Daher ist das Radikal J ein direkter Summand von A , folglich $J = 0$, denn

² Vgl. F. SZÁSZ, Die Ringe, deren endlich erzeugbare echte Unterringe Hauptrechts-ideale sind, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 13 (1962) (im Erscheinen), und die Kandidats-dissertation des Verfassers.

aus $e^2 = e \in J$ erhält man $e = 0$. Die weiteren Behauptungen folgen aus dem Kapitel III von [13].

SATZ 2.2. *Jeder MHR-Ring A ohne nilpotente Elemente ($\neq 0$) ist die ringtheoretische direkte Summe von Schiefkörpern (GERTSCHIKOFF [11]). Jeder nullteilerfreie MHR-Ring ist ein Schiefkörper. Jeder kommutative halbeinfache MHR-Ring ist die ringtheoretische direkte Summe von Körpern. Jeder bireguläre [13] MHR-Ring ist die ringtheoretische direkte Summe von vollen Matrizenringen über Schiefkörpern.*

BEWEIS. Jeder MHR-Ring A ohne nilpotente Elemente ($\neq 0$) ist nämlich halbeinfach, denn das Radikal ist ein Nilideal. Nach dem Satz von LITOFF (Kapitel IV von [13]) läßt sich aber jeder endlich erzeugbare Unterring von A in einen solchen Unterring von A einbetten, der einem vollen Matrizenring über einem Schiefkörper isomorph ist, und der im allgemeinen nilpotente Elemente ($\neq 0$) hat. Hiernach ist jede zweiseitige einfache direkte Komponente von A ein Schiefkörper.

Ist nun insbesondere A nullteilerfrei, so ist A selbst ein Schiefkörper.

Da jeder kommutative einfache Ring ein Körper ist, und jedes (zweiseitige) Hauptideal eines biregulären Ringes ein Einselement hat, gelten auch die weiteren Behauptungen im Satz 2.2.

BEMERKUNG. Der Satz von SZELE [27] ist eine Folgerung sowohl des Wedderburn—Artinschen Struktursatzes als auch unserer Resultate über MHR-Ringe. Dagegen kann auch ein kürzer elementarer Beweis des Szeleschen Satzes über die Ringe ohne echte Rechtsideale gegeben werden (vgl. Lemma 1 von [24]).

SATZ 2.3. *Jeder halbeinfache MHR-Ring ist ein MH_1 -Ring. Ein MH_1 -Ring A ist dann und nur dann eine ringtheoretische subdirekte Summe einfacher Ringe E_α ($\alpha \in \Omega$), wenn A die ringtheoretische direkte Summe der Ringe $E_\alpha (\cong E'_\alpha)$ ist. Dann ist A auch ein MH_1 -Ring.*

BEWEIS. Ein halbeinfacher MHR-Ring ist zweiseitig vollständig reduzibel, also ist er ein MH_1 -Ring.

Es sei nun A ein MH_1 -Ring, der eine subdirekte Summe einfacher Ringe E_α ($\alpha \in \Omega$) ist. Dann existieren maximale Ideale B_α mit $A/B_\alpha \simeq E_\alpha$, $\bigcap_{\alpha \in \Omega} B_\alpha = 0$, $A^2 = B_\alpha + A$. Wir zeigen, daß jedes Hauptideal (a) von A , als ein (A, A) -Doppelmodul, vollständig reduzibel ist. Es sei nämlich $C_\alpha = (a) \cap B_\alpha$. Dann können die Ideale C_α mit $C_\alpha = (a)$ weggelassen werden, und (a) ist eine subdirekte Summe der übrigbleibenden einfachen Ringe $(a) C_\alpha (\simeq A/B_\alpha; a \notin B_\alpha)$. Ist nun (m) ein beliebiges minimales Ideal von A in (a) , so existiert ein Ideal C_α mit $(m) \not\subseteq C_\alpha$, also mit $(a) = (m) \oplus C_\alpha$. Hiernach ist das endo-

morphie Bild C_α von (a) ebenfalls ein Hauptideal. Ist nun (m_1) ein minimales Ideal von A in C_α , so gilt $C_\alpha = (m_1) \oplus C_\beta$ mit einem Hauptideal C_β von A . Da aber A ein *MHI*-Ring ist, besteht $(a) = (m) \oplus (m_1) \oplus \cdots \oplus (m_k)$ mit einem geeigneten Index k , denn $(a) \supset C_\alpha \supset C_\beta \supset \cdots$ muß abbrechen. Deshalb ist aber auch $A = \bigcup_{a \in A} (a)$, als ein (A, A) -Doppelmodul, vollständig reduzibel, w. z. b. w.

Herr Dr. A. KERTÉSZ hat in [15] und [16] bewiesen, daß eine Folge untereinander äquivalenter Bedingungen unter den Ringen mit Linkseinsselement genau die Artinschen halbeinfachen Ringe charakterisiert. Diese Bedingungen bestimmen aber genau die halbeinfachen *MHR*-Ringe in der größeren Klasse der Ringe ohne Rechtsannullatoren ($\neq 0$). Ist nun $A' = A$, wenn A ein Einselement hat, und sonst A' die Dorrohsche Erweiterung von A mit Einselement, so gilt der

SATZ 2.4. Für einen Ring A ohne Rechtsannullatoren ($\neq 0$) sind die folgenden Bedingungen untereinander äquivalent:

- a) A ist ein halbeinfacher *MHR*-Ring;
- b) A ist die direkte Summe idempotenter minimaler Rechtsideale;
- c) A ist ein *MHR*-Ring und eine subdirekte Summe von Ringen, die zu idempotenten minimalen Rechtsidealen von A A -isomorph sind;
- d) A ist ein *MHR*-Ring, in dem der Durchschnitt gewisser modularer ([13]) maximaler Rechtsideale $(0)_r$ ist;
- e) A stimmt mit seinem Sockel A_1 überein;
- f) der Rechtsannulator in A' jedes Elementes von A ist der Durchschnitt endlich vieler modularer maximaler Rechtsideale von A' ;
- g) es gibt zu jedem Rechtsideal R von A ein Rechtsideal S von A mit $A = R + S$, $R \cap S = 0$;
- h) existiert die direkte Summe $R^* = \sum_{\alpha \in \Omega} \oplus R_\alpha$ für eine möglichst maximale Menge der minimalen Rechtsideale R_α ($\alpha \in \Omega$), so besteht $A = R^*$.

BEWEIS. Gilt $A = A_1$ für den Sockel (d. h. Rechtssockel) A_1 von A , so ist A wegen $A_1 \cdot J = 0$ genau dann halbeinfach, wenn A keinen Rechtsannulator ($\neq 0$) besitzt. Betrachten wir nun A' als einen A' -Rechtsmodul. Der Beweis folgt nun aus dem Kertészschen Hauptsatze in [16].

BEMERKUNGEN. Ist jedes Rechtsideal R eines Ringes A , als eines A -Rechtsmoduls, ein rechtsseitiger direkter Summand, so gilt $A = B \oplus C$, wobei $\oplus$ eine ringtheoretische direkte Summe, B ein halbeinfacher *MHR*-Ring und C ein Zeroring mit additiver elementarer Abelscher Gruppe ist. (Die additive Ordnung $O^+(c)$ jedes Elementes c von C ist eine quadratfreie Zahl.) — Ist insbesondere jedes Rechtsideal R eines Ringes A , als eines (A, A) -Doppel-

moduls, ein zweiseitiger direkter Summand, so gilt $A = B \oplus C$, wobei B die ringtheoretische direkte Summe von Schiefkörpern, und C ein Zeroring mit elementarer Abelscher additiver Gruppe ist.

SATZ 2.5. *Ein Ring A ist dann und nur dann die ringtheoretische direkte Summe von Schiefkörpern, wenn jedes in einem Hauptrechtsideale liegende Rechtsideal R von A ein Rechtseinselement e besitzt.*

BEWEIS. Es seien also e und e_1 Rechtseinselemente von $R \subseteq (a)_r$ bzw. von $R_1 = (1-e)R (\subseteq (a)_r)$. Da $R_1^2 = (1-e)R(1-e)R = 0$ ist, folgt aus der Halbeinfachheit von A auch $R_1 = 0$. Dies bedeutet aber, daß e gleichzeitig auch ein Linkseinselement von R ist. Nach unserem Satz 4 in [26] ist aber ein beliebiger Ring B dann und nur dann ein halbeinfacher MHR-Ring, wenn jedes in einem Hauptrechtsideale liegende Rechtsideal R von B ein Linkseinselement besitzt. Hiernach ist also der Ring A ein halbeinfacher MHR-Ring. Gilt nun $e_1 A \cap e_2 A = 0$ ($e_i^2 = e_i$), so hat $e_1 A + e_2 A$ ebenfalls ein (zweiseitiges) Einselement, und die Komponenten dieses Einselementes können als e_1 und e_2 mit $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ gewählt werden. Dann ist jedes Rechtsideal von A ein Ideal, und somit ist A die ringtheoretische direkte Summe von Schiefkörpern. Die Umkehrung ist trivial.

SATZ 2.6. *Ein beliebiger Ring A ist dann und nur dann regulär im von Neumannschen Sinne, wenn jedes Hauptrechtsideal von A ein Linkseinselement hat. Ein beliebiger Ring A ist dann und nur dann regulär, wenn $(a)_r \cdot (a)_l = (a)_r \cap (a)_l$ für jedes Element $a \in A$ gilt. (Vgl. S. LAJOS und K. ISÉKI bezüglich Halbgruppen.) Jeder halbeinfache MHR-Ring ist regulär.*

BEWEIS. Der Ring A besitzt nicht notwendig ein Einselement. (Wir verweisen bezüglich regulärer Ringe ohne Einselement auf MCCOY's Buch.) Hiernach sei $e = na + ab$ ($n \in I$; $a, b \in A$) ein Linkseinselement von $(a)_r$. Dann gilt aber $a = ac$ mit $c = na + ba$, also $a = eac = a(n+b)a(n+b)a$. Dies bedeutet die Regularität von A . Umgekehrt folgt nun aus $a = ada$ ($d \in A$) auch $ad(na + ax) = na + ax$, also die Existenz eines Linkseinselementes $e = ad$ in $(a)_r$.

Gilt $(a)_r \cdot (a)_l = (a)_r \cap (a)_l$ für jedes $a \in A$, so ergibt sich aus $a = (n_1 a + a b_1) \cdot (b_2 a + n_2 a)$ ($n_i \in I$; $b_i \in A$) durch eine wiederholte Einsetzung $a = a[(n_1 + b_1) \cdot (b_2 a + n_2 a)(n_1 + b_1)(n_2 + b_2)]a$, also die Regularität von A . Umgekehrt genügt es, in regulären Ringen $(a)_r \cap (a)_l \subseteq (a)_r \cdot (a)_l$ zu beweisen. Jedes Element des Durchschnittes hat die Form $b = ay = za$ ($y, z \in A$). Gilt nun $a = axa$, so ist auch $b = za = zaxa = ayxa \in (a)_r \cdot (a)_l$, w. z. b. w.

Die letzte Behauptung des Satzes 2.6 ist eine Folgerung der obigen Verallgemeinerung des von Neumannschen Kriteriums bezüglich regulärer Ringe, und die unserer Arbeit [26].

Also ist jeder halbeinfache *MHR*-Ring regulär, und bekanntlich ist jeder reguläre Ring halbeinfach (im Jacobson'schen Sinne). Das folgende Beispiel zeigt aber die Existenz eines regulären Ringes, der kein *MHR*-Ring ist.

BEISPIEL 2.7. Es sei A die komplette direkte Summe unendlich vieler regulärer Ringe $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ usw. Es seien $b_1 = \langle a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots \rangle$ bzw. $b_k = \langle 0, 0, \dots, 0, a_{k,k}, a_{k,k+1}, \dots \rangle$ die Elemente von A mit beliebigen $a_{1n} (\neq 0, \in A_1)$ und mit $a_{k-1,n} \cdot a_{k,n} = a_{k-1,n} (\in A_n)$. Dann ist $(b_1)_r \supset (b_1 b_2)_r \supset (b_1 b_2 b_3)_r \supset \dots$ eine unendliche absteigende Kette der Hauptideale, obwohl A offenbar regulär ist. Es kann in A auch ein in einem Hauptideale liegendes Rechtsideal ohne Linkseinselemente explizit gegeben werden: $R^* = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus (e_j - e_{j+1})e_j A$, wobei $(b_1 \cdot b_2 \dots b_j)_r = e_j A$ ($e_j^2 = e_j$) ist.

Zum Schluß erwähnen wir eine Charakterisierung der *MH₁R*-Ringe.

SATZ 2.8. Ein Ring A ist dann und nur dann ein *MH₁R*-Ring, wenn die Minimalbedingung für die in Hauptidealen liegenden Nilrechtsideale von A gilt, und jedes in einem Hauptideale liegende Rechtsideal R von A die Gestalt $R = eA \oplus R_1$ hat, wobei $e^2 = e$ und R_1 ein Nilrechtsideal von A ist.

BEMERKUNG 2.9. Da jeder nullteilerfreie einfache *MHR*-Ring ein Körper ist, scheint es uns sehr merkwürdig, alle nullteilerfreien einfachen Ringe zu bestimmen. Ist ein nullteilerfreier einfacher Ring kein Schiefkörper, so ist er aber deswegen kein *MHR*-Ring. Es kann aber auch ein solcher Ring ergeben werden. Man nimmt nämlich einen nullteilerfreien Ring A , der sich in keinen Schiefkörper aber in einen einfachen nullteilerfreien Ring E einbetten läßt (MALCZEW; COHN). Dann hat E sicher die obigen Eigenschaften. Wir wissen bisher noch nicht, ob was ein Kriterium dafür ist, daß ein *MHR*-Ring in einen einfachen *MHR*-Ring eingebettet werden kann. Man wünscht ebenfalls eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür zu suchen und finden, daß in einer subdirekten Summe A beliebiger einfacher Ringe E_α die Ringe E_α bis auf Isomorphie und Permutation durch den ursprünglichen Ring A eindeutig bestimmt seien. Man möchte auch die solchen Ringe explizit bestimmen, deren jedes in einem Hauptideale liegende Linksideal ein Rechtseinselement (bzw. Linkseinselement) hat. Die ringtheoretischen direkten Summen von Schiefkörpern sind nämlich sicher solche Ringe. Wir wissen bisher ebenfalls auch noch nicht, ob es einen Ring gibt, der die direkte Summe von m idempotenten minimalen Rechtsidealen und die von n idempotenten minimalen Linksidealen ist, wobei m und n zwei verschiedene unendliche Mächtigkeiten sind.

§ 3. Die additive Gruppe der MHR-Ringe

Die Methoden von L. FUCHS—T. SZELE über die additive Gruppe der Artinschen Ringe, die später von L. FUCHS weiterentwickelt wurden [7], können auch auf die Untersuchung der additiven Gruppe der MHR-Ringe angewandt und verallgemeinert werden.

SATZ 3.1. *Eine Abelsche Gruppe A^+ ist dann und nur dann die additive Gruppe eines MHR-Ringes, wenn $A^+ = B \oplus C$ gilt, wobei B vollständig und C reduziert periodisch sind. Existiert eine Prüfersche Gruppe $Z(p^\infty)$ in A^+ , so liegt $Z(p^\infty)$ im zweiseitigen Annulator des MHR-Ringes A .*

BEWEIS. Ist A ein MHR-Ring und B die maximale vollständige Untergruppe von A^+ , so gilt $A^+ = B \oplus C$ mit reduzierter C . Ist nun $(ma)_r$ ($= m(a)_r$) ein minimales Hauptideal unter den Hauptidealen $(na)_r$ ($n \in I$), so gilt $ma \in B$. Daher ist C periodisch wegen $B \cap C = 0$. Umgekehrt habe A^+ die erwähnte Struktur, und es sei $B = B_1 \oplus B_2$ mit torsionsfreier B_1 und mit periodischer B_2 . Definiert man nun über B_1 einen kommutativen Körper [7] und sei $B_2 A = AB_2 = CA = AC = 0$, so entsteht über A^+ ein spezieller MHR-Ring.

Ist ferner $Z(p^\infty) \subseteq A^+$, $a \in Z(p^\infty)$, $O(a) = p^k$, $A^+ = B \oplus C$ mit den vorigen Bezeichnungen bezüglich des MHR-Ringes A , so gilt $x = b + c$ ($x \in A$) mit $b \in B$, $c \in C$, $O(c) = l$. Die Gleichungen $lu = a$ und $p^k v = b$ sind in A^+ lösbar, und es gilt $ax = ab + ac = a(p^k v) + (lu)c = (p^k a)v + u(lc) = 0$, also $Z(p^\infty) \cdot A = 0$. Ganz ähnlich ergibt sich auch $A \cdot Z(p^\infty) = 0$.

SATZ 3.2. *A^+ ist dann und nur dann die additive Gruppe eines MHR-Ringes mit Einselement, wenn $A^+ = B \oplus C$ gilt, wobei B torsionsfrei vollständig und C beschränkt periodisch sind. A^+ ist genau dann die additive Gruppe eines primitiven MHR-Ringes, wenn A^+ entweder eine torsionsfreie vollständige Gruppe oder eine elementare Abelsche p -Gruppe ist.*

BEWEIS. Ist A ein MHR-Ring mit Einselement, so gilt $Z(p^\infty) \not\subseteq A^+$. Die maximale vollständige Untergruppe B von A^+ ist also torsionsfrei, und der maximale periodische Unterring C von A , als ein ringtheoretischer direkter Summand von A , ist ein endomorphes Bild des Ringes A . Also hat der Ring C ein Einselement e mit $O(e) = m$. Hiernach gilt aber $mC = 0$. Besteht nun umgekehrt $A^+ = B \oplus C$ mit torsionsfreier vollständiger B und mit beschränkter periodischer C , so konstruieren wir auf B einen kommutativen Körper [7]. Ferner ist C die direkte Summe von Gruppen $Z(p_m^{k_i})$ für gewisse Primzahlen p_m und Exponenten k_i . Wir sammeln nun die Summanden $Z(p_m^{k_i})$, die zu einem festen Paar (p_m, k_i) gehören, in eine Summe D_{m,k_i} zusammen. Nach einem wichtigen Lemma von L. FUCHS ([7], S. 281) kann auf jede Gruppe

$D_{m,k}$ ein kommutativer Ring mit Einselement aufgebaut werden, dessen sämtliche verschiedene Ideale $0, p_m D_{m,k}, p_m^2 D_{m,k}, \dots, p_m^{k-1} D_{m,k} \neq 0$ sind. Da nur endlich viele verschiedene $D_{m,k}$ existieren, entsteht mit den Definitionen $BD_{m,k} = D_{m,k}B = 0$ und $D_{m,k} \cdot D_{n,l} = D_{n,l} D_{m,k} = \delta_{m,n} \delta_{k,l} D_{m,k}$ offenbar ein *MHR*-Ring A über A^+ .

Jeder primitive *MHR*-Ring ist nach [26] einfach. Gilt nun $pA = A$ für jede Primzahl p , so ist A^- vollständig, und zwar torsionsfrei nach der letzten Behauptung des Satzes 3.1. Im Falle $pA \neq A$ ist aber $pA = 0$, und hiernach ist A^- eine elementare Abelsche p -Gruppe. Umgekehrt können auf die so bekommenen Gruppen kommutative Körpern [7] aufgebaut werden, w. z. b. w.

SATZ 3.3. *Die Abelsche Gruppe A^- ist dann und nur dann die additive Gruppe eines MHR-Radikalringes, wenn A^+ periodisch ist. Ist insbesondere A ein nilpotenter MH_1R -Ring, so gilt in A die Minimalbedingung auch für die in Hauptrechtsidealen liegenden additiven Untergruppen von A^+ ,*

BEWEIS. Es sei A^- die additive Gruppe eines *MHR*-Radikalringes A . Dann ist A ein Nilring nach dem Satz 1 unserer Arbeit [26]. Wäre nun $x (\neq 0, \in A)$ ein Element der Ordnung $O^+(x) = 0$, so würde $(2^k x)_r = (2^{k+1} x)_r$ mit einem Exponenten k bestehen. Dann gilt aber mit der Bezeichnung $y = 2^k x$ eine Gleichung $y = n(2y) + (2y)z$, folglich auch $(2n-1)^m y = (2n-1)^{m-1}(-2z)y = \dots = (-2z)^m y = 0$ ($n \in I, z \in A, z^m = 0$). Da aber $O(y) = 0$ gilt, und der Ring I der ganzen Zahlen nullteilerfrei ist, gelten $2n-1 = 0$ und $n = 1/2 \in I$, was unmöglich ist. Hiernach ist A^+ tatsächlich periodisch. Umgekehrt kann auf jede periodische additive Gruppe ein Zero-ring als ein spezieller *MHR*-Radikalring aufgebaut werden.

Es sei nun A ein nilpotenter MH_1R -Ring, $A^n = 0$ ($A^{n-1} \neq 0$) und L_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n-1$) der Linksannulator von A^k in A . Dann ist $0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_{n-1} = A$. Es sei ferner $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots$ eine unendliche absteigende Kette von in einem Hauptrechtsideale $(a)_r$ von A liegenden additiven Untergruppen von A^+ , und $a \in L_t$ mit $t \in I, 1 \leq t \leq n-1$. Ist nun $R_i = G_i + G_i A$, so gelten $R_i \subseteq (a)_r$ und $R_i A \subseteq R_i$. Da aber A ein MH_1R -Ring ist, so existiert ein Index i_1 mit $R_{i_1+1} = R_{i_1+2} = \dots$, also auch mit $G_{i_1+1} + L_{t-1} = G_{i_1+2} + L_{t-1} = \dots$ wegen $G_i A \subseteq L_t A \subseteq L_{t-1}$. Aus $x \in L_t A$ erhält man nämlich $x A_{t-1}$, folglich auch $x \in L_{t-1}$ und $L_{t-1} \supseteq L_t A$. Da aber der Verband der Untergruppen von A^+ modular ist, gilt $G_{i_1+1} \cap L_{t-1} \supset G_{i_1+2} \cap L_{t-1} \supset \dots$. Nach endlich vielen Schritten gewinnen wir die Existenz eines Indexes i_{t-1} mit $G_{i_{t-1}+1} + L_1 = G_{i_{t-1}+2} + L_1 = \dots$, folglich auch mit $G_{i_{t-1}+1} \cap L_1 \supset G_{i_{t-1}+2} \cap L_1 \supset \dots$. Diese unendliche Kette besteht wegen $L_1 A = 0$ aus in $(a)_r$ liegenden Rechtsidealen von A , und da A ein MH_1R -Ring ist, muß auch die Kette $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots$ nach endlich vielen Schritten abbrechen, w. z. b. w.

BEMERKUNG 3.4. Es kann mit einer ähnlichen Methode gezeigt werden, daß jeder Unterring eines nilpotenten MH_1R -Ringes ebenfalls ein MH_1R -Ring ist. Gilt ferner die Maximalbedingung für die in einem Hauptrechtsideale liegenden Rechtsideale eines nilpotenten MH_1R -Ringes A , so gilt die Maximalbedingung auch für die in einem Hauptrechtsideale liegenden additiven Untergruppen von A^+ . Wir wissen aber noch nicht, ob es einen MHR -Radikalring (bzw. einen nilpotenten MHR -Ring bzw. einen MH_1R -Nilring) gibt, dessen ein Unterring S die entsprechende Kettenbedingung nicht erbt. Auch das Problem der Existenz eines MHR -Nilringes ohne die Minimalbedingung für Hauptlinksideale bildet für uns bisher eine offene Frage. Wir wissen ferner ebenfalls noch nicht die Lösung von zwei wichtigen Problemen bezüglich Abelscher Gruppen: 1. Was ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Abelsche Gruppe G einen vollen Endomorphismenring mit Minimalbedingung für zweiseitige Hauptideale besitze? 2. Was ist ein Kriterium dafür, daß auf eine Abelsche Gruppe G wenigstens ein MHR -Ring mit Maximalbedingung für Hauptrechtsideale (kurz: $MMHR$ -Ring) aufgebaut werden kann?

§ 4. Die MHR -Ringe als Operatorenbereiche

Wir werden die Operatoren und die Endomorphismen einer Abelschen Gruppe M stets rechtsseitig schreiben. Offensichtlich erhält man nun zwei verschiedene Problemkreise, wenn man eine Eigenschaft erstens für den Verband der Linksideale von E , zweitens für den Verband der Rechtsideale von E erfordert, wobei E den vollen Endomorphismenring von M bezeichnet.

SATZ 4.1. *Ist E der volle Endomorphismenring einer Abelschen Gruppe M , so sind die folgenden Bedingungen untereinander äquivalent:*

- I. *in E gilt die Minimalbedingung für Hauptrechtsideale;*
- II. *in E gilt die Minimalbedingung für Hauptlinksideale;*
- III. *in E gilt die Minimalbedingung für Rechtsideale;*
- IV. *in E gilt die Minimalbedingung für Linksideale;*

V. *M ist die direkte Summe einer endlichen Abelschen Gruppe und endlich vieler Exemplare $\mathbb{R}$ der additiven Gruppe aller rationalen Zahlen.*

BEWEIS. Aus I folgt V. Nehmen wir I an. Da E ein Einselement e hat, ist nE für jede ganze Zahl n ein Hauptrechtsideal in E . Ist nun mE ein minimales Hauptrechtsideal unter den Rechtsidealen nE , so ist mE^+ eine vollständige Gruppe, also gilt $k(mE) = mE$ für jedes $k (\in I, \neq 0)$. Dann ist aber mM wegen $mM = m(ME) = M(mE) = M(kmE) = km(ME) = kmM$ ebenfalls vollständig. Es gibt also eine Untergruppe M_0 von M mit

$M = mM \oplus M_0$ nach dem Satz von BAER, wobei M_0 offenbar eine m -beschränkte periodische Gruppe ist. Da $me = kmx_k$ in E für jedes $k (\neq 0, \in I)$ lösbar ist, gilt $Z(p^\infty) \not\subseteq M$. Folglich ist mM torsionsfrei. Ferner ist M_0 die direkte Summe von zyklischen Gruppen wegen $mM_0 = 0$ und nach dem Satz von BAER. Ist nun $M = \sum_{i=1}^{\infty} \oplus M_i$ ($M_i \neq 0$) eine direkte Zerlegung von M , so bilden die direkten Summanden $S_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} \oplus M_j$ eine absteigende Kette, und es gilt $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k \oplus S_k$ für jedes $k (\in I, \geq 1)$. Ist nun die Abbildung $a_n \in E$ die Projektion von M auf S_n , so gilt offenbar $(a_n)_r \subseteq (a_{n-1})_r$ wegen $a_{n-1}a_n = a_n$. Besteht aber $(a_n)_r = (a_{n-1})_r$ im MHR -Ring E , so ist die Gleichung $a_n y_n = a_{n-1}$ in E lösbar, und so ergibt sich $M_n = M_n a_{n-1} = M_n a_n y_n = 0$ wegen $M_n a_n = 0$. Dies bedeutet nun, daß M die direkte Summe nur endlich vieler ihrer Untegruppen ist. Hiernach folgt aus I tatsächlich V.

Aus II folgt V. Der Beweis ist dem „aus I folgt V“ ähnlich. Man bestätigt aber $(a_n)_l \subseteq (a_{n-1})_l$ wegen $a_n a_{n-1} = a_n$. Ist E ein Ring mit Minimalbedingung für Hauptlinksideale (d. h. ein MHL -Ring), so hat $z_n a_n = a_{n-1}$ in E Lösungen, wenn $n \geq n_0$ ist. Aus $M_n = M_n a_{n-1} = M_n z_n a_n \subseteq M a_n = S_n$ folgt aber $M_n = 0$ wegen $M_n \cap S_n = 0$, und dies bedeutet wirklich das Bestehen von V.

Aus V folgen III und IV. Im Falle V ist nämlich der volle Endomorphismenring E_1 der torsionsfreien vollständigen Gruppe mM ein voller Matrizenring vom Typ $n \times n$ über dem rationalen Zahlkörper K_0 . Der volle Endomorphismenring E_2 der endlichen Gruppe M_0 ist aber offenbar endlich. Da ferner die additive Gruppe $\mathbb{R}$ aller rationalen Zahlen keine echte Untergruppe von endlichem (gruppentheoretischem) Index hat, so ist $\text{Hom}(mM, M_0) = 0$. Aus der Torsionsfreiheit von mM folgt nun auch $\text{Hom}(M_0, mM) = 0$. Hiernach gewinnen wir eine ringtheoretische direkte Zerlegung $E = E_1 \oplus E_2$. Also gilt in E die Minimalbedingung sowohl für die Rechtsideale, als auch für die Linksideale.

Aus III folgt I. Dies ist trivial.

Aus IV folgt II. Dies ist ebenfalls trivial.

Das folgende Beispiel zeigt uns die Existenz einer Abelschen Gruppe M derart, daß der Zentralisator $A^{(2)}$ des Zentralisators $A^{(1)}$ von einem einfachen MHR -Unterringe A des vollen Endomorphismenringes E von M bezüglich E von $A (= A^{(0)})$ verschieden ist.

BEISPIEL 4.2. Es sei nämlich A der Ring aller $\aleph_0 \times \aleph_0$ Matrizen mit endlich vielen Spalten- und Zeilenvektoren ($\neq 0$) über dem rationalen Zahlkörper K_0 . Bezeichne e_{ij} die Matrizeneinheiten ($i, j = 1, 2, \dots, n, \dots$) und h_{kl} einen Homomorphismus mit $e_{ij} h_{kl} = \delta_{ik} e_{lj}$. Dann ist dieser h_{mk} ein

A -Homomorphismus wegen $(e_{ij}e_{kl})h_{mn} = (e_{ij}h_{mn})e_{kl}$ im vollständig reduziblen A -Rechtsmodul A , und es gelten $h_{mn} \in A^{(1)}$, $\sum_{i=1}^{\infty} h_{ii} = 1$, $h_{ij}h_{kl} = \delta_{jk}h_{il}$, wenn wir den Ring A mit dem Ring $\bar{A}$ aller Rechtsmultiplikationen $\bar{a}$ ($a \in A$) und K_0 mit dem Körper aller A -Endomorphismen von $(e_{11})_r$ identifizieren. Es sei ferner $r_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} h_{n1}r_{ij}h_{1n}$ ($r_{ij} \in K_0$), $b \in A^{(1)}$ ein beliebiges Element, und $b_{ij} = h_{ii}bh_{jj}$. Dann gilt $b = \sum_{i,j}^{\infty} b_{ij} = \sum_{i,j}^{\infty} r_{ij}h_{ij} = \sum_{i,j}^{\infty} h_{ij}r_{ij}$, wegen $h_{ij}r_{ij} = h_{i1}r_{ij}h_{1j} = r_{ij}h_{ij}$. Ist nun $a_1 = e_{11}h_{1i}b_{ij}h_{j1}$ ($\in (e_{11})_r$), so ist $e_{1i}x \rightarrow a_1x$ ($x \in A$) ein A -Endomorphismus von $(e_{11})_r$, also gilt $h_{1i}b_{ij}h_{j1} = s_{ij} \in K_0$. Hiernach erhält man $b_{ij} = h_{i1}s_{ij}h_{1j} = s_{ij}h_{ij} = h_{ij}s_{ij}$ und $b = \sum_{i,j}^{\infty} s_{ij}h_{ij}$, wobei s_{ij} nur für endlich viele j von Null verschieden ist, denn $e_{1i}b$ muß nur aus endlich vielen Gliedern ($\neq 0$) bestehen. Bezeichne nun A^* den Ring aller formalen unendlichen Summen $a^* = \sum_{j=1}^{\infty} r_{ij}e_{ij}$ mit r_{ij} mit $r_{ij} \neq 0$ nur für endlich viele j . Ist ferner $M = A$, $m \in M$, $a^* \in A^*$, $b \in A^{(1)}$, so gilt $(ma^*)b = (mb)a^*$, folglich auch $A^* \subseteq A^{(2)}$. Also erhält man $A^{(1)} \neq A^{(2)}$ wegen $A^{(1)} = A = M = \bar{A} \subset A^*$, w. z. b. w.

SATZ 4.3. *Ist A ein halbeinfacher MHR-Ring, so ist jeder perfekte A -Modul M vollständig reduzibel, und die Mächtigkeit der Menge aller A -nichtisomorphen irreduziblen A -Moduln ist gleich der Mächtigkeit von Menge aller einfachen Ideale von A .*

BEWEIS. Bekanntlich ist jeder treue minimale A -Modul über einem primitiven Ring A mit $\neq 0$ Sockel einem minimalen Rechtsideale R von A notwendig isomorph. Ähnlich ist jeder perfekte minimale A -Modul über einem halbeinfachen MHR-Ring A einem minimalen Rechtsideale R des Operatorenbereiches A -isomorph. — Ist nun $M(=MA)$ ein beliebiger A -Modul über einem halbeinfachen MHR-Ring A , so besteht $m = \sum m_i a_i$ mit $m_i a_i \neq 0$ ($m_i \in M$; $a_i \in A$) und mit $a_i = \sum b_{ij}$, wobei b_{ij} in einem minimalen Rechtsideale R_{ij} von A liegt. Ist nun $m_i b_{ij} \neq 0$, so ist $m_i R_{ij} (\neq 0)$ ein minimaler A -Untermodule von M , und somit ist M vollständig reduzibel. Die letzte Behauptung folgt durch klassische Methoden.

BEMERKUNG. Das folgende Beispiel zeigt, daß es einen einfachen MHR-Ring A und einen A -Modul M derart gibt, daß keine echte direkte Zerlegung $M = M_0 \oplus M_1$ von M mit $M_0 A = 0$ und mit $M_1 A = M_1$ existiert. (Ist A nämlich ein Artinscher halbeinfacher Ring, so gilt für jeden A -Modul M eine direkte Zerlegung $M = M_0 \oplus M_1$ mit $M_0 A = 0$, $M_1 A = M_1$, wegen einer Peirceschen Zerlegung von M .) Es sei also A der im Beispiel 4.2 betrachtete Ring A und M die Menge aller Paare (a, n) mit $a \in A$, $n \in I$, wobei wir

die Gleichheit und Addition der Paare gewöhnlich definieren. Definiert man auch $(a, n)b = (ab + nb, 0)$, so ist M ein A -Modul. Dann folgt aus $M = M_0 \oplus M_1$, aus $M_0A = 0$ und aus der Halbeinfachheit von A sicher $M_0 = 0$.

SATZ 4.4. *Ist A ein beliebiger Ring, und ist xR ein direkter Summand von M für jedes in einem Hauptrechtsideale von A liegende Rechtsideal R von A und für jedes Element x von jedem A -Modul M , so ist A notwendig ein halbeinfacher MHR-Ring.*

BEWEIS. Es sei A ein Ring mit der obigen Eigenschaft und M der spezielle Modul aller Paare (a, n) ($a \in A, n \in I$) mit $(a, n)b = (ab + nb, 0)$ und mit gewöhnlich definierter Gleichheit und Addition bzw. mit der obigen Operatormultiplikation. Es sei $x = (0, 1)$ und $(e, 0)$ die Komponente von x in der Zerlegung $M = xR \oplus K$ für ein Rechtsideal R , das in einem Hauptrechtsideale $(a) (\subseteq A)$ liegt. Dann ist $e (\in A)$ notwendig ein Linkseinselement in R , und somit ist A nach unserem Satz 4 in [26] ein halbeinfacher MHR-Ring, w. z. b. w.

4.5. *Es sei A ein MHR-Ring mit dem Radikal J , und M ein perfekter A -Rechstmodul, K ein Untermodul von M . Der Faktormodul M/K von M ist dann und nur dann vollständig reduzibel, wenn $MJ \subseteq K$ gilt.*

BEWEIS. Ist M/K vollständig reduzibel, so besteht $(M/K)J = K/K$, also $MJ \subseteq K$. Umgekehrt folgt aus $MJ \subseteq K$, daß M/K ein (perfekter) A/J -Modul ist, der nach 4.3 vollständig reduzibel ist.

4.6. *Sind sowohl M/K_1 als auch M/K_2 vollständig reduzible „ausgezeichnete“ Faktormoduln eines perfekten A -Moduls M , so gilt $K_1 = K_2$ (Die Definition s. im § 1.)*

BEWEIS. Unter den Voraussetzungen erhält man nach 4.5 sofort $MJ \subseteq K_1$ und $MJ \subseteq K_2$, also $MJ \subseteq K_1 \cap K_2$. Dies bedeutet aber nach 4.5, daß $M/(K_1 \cap K_2)$ ebenfalls vollständig reduzibel ist. Da auch die A -Homomorphismen

$$m + (K_1 \cap K_2) \rightarrow m + K_i \quad (i = 1, 2; m \in M)$$

nach der Definition des ausgezeichneten Faktormoduls Isomorphismen sind, besteht $K_1 = K_1 \cap K_2 = K_2$, w. z. b. w.

4.7. *Es sei A ein MHR-Ring mit nilpotentem Radikal J und mit der Eigenschaft $a \in aA$ für jedes $a \in A$. Es sei ferner $M = M_0$ ein perfekter A -Modul und M_k/M_{k+1} ein vollständig reduzibler ausgezeichneter Modul für $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Dann kann das obere Loewysche System $M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots$ in der kanonischen Form $M \supset MJ \supset MJ^2 \supset \dots$ eindeutig dargestellt werden. Das aus den „Hypersockeln“ von M bestehende untere Loewysche System läßt sich aber unter den Voraussetzungen in der kanonischen Gestalt*

$K_0(M) \subset K_1(M) \subset K_2(M) \subset \dots$ eindeutig darstellen ($K_\gamma(M) = \{m | m \in M, mJ^\gamma = 0\}$).³

BEMERKUNG 4.8. Wir wissen bisher noch nicht, wie weit die Voraussetzungen $MA = M$, $J^n = 0$ und $a \in aA$ (für jedes $a \in A$) dafür abgeschwächt werden können, daß es eine ausführliche Bekanntmachung über eine explizite Darstellung der oberen bzw. unteren Loewyschen Systeme über *MHR*-Ringe möglich sei. Es ist aber ebenfalls eine offene Frage, ob genau wann die Bedingung $A^{(0)} = A^{(2)}$ für einen halbeinfachen *MHR*-Unterring A des vollen Endomorphismenringes E von einer Abelschen Gruppe M gilt.

§ 5. Die verschiedenen Typen der Radikale von *MHR*-Ringen

Bezeichne J das Jacobsonsche Radikal [13], B das Baer—McCoysche (untere) Nilradikal [2], [19], N das obere Nilradikal, L das Levitzkische Radikal [18], Z das Fuchssche (Zeroid-) Radikal [9] und G das Brown—McCoysche Radikal [3]. In beliebigen Ringen bestehen immer $B \subseteq L \subseteq N \subseteq J \subseteq G$ und $N \subseteq Z$. Es gibt Ringe sowohl mit $Z \subset J$ als auch mit $G \subset Z$. Wir sahen schon bei Satz 1 von [26], daß J in *MHR*-Ringen stets ein Nilideal ist. Vielmehr hat J in *MHR*-Ringen die stärkere Eigenschaft, daß jedes „unendliche Produkt“ $j_1 \cdot j_2 \cdot j_3 \cdots$ ($j_i \in J$) gegen Null konvergiert. (Ist aber $A = \{a\}$, $O(a) = 0$, $a^n = 0$ ($n \geq 2$), so streben alle „unendlichen Produkte“ in A ebenfalls gegen Null, obwohl der Radikalring $A = \{a\}$ kein *MHR*-Ring ist.)

Es gilt nun auch

SATZ 5.1. Ist A ein *MHR*-Ring, so gilt in A immer $B = L = N = J$.

BEWEIS. A/B ist ein Ring ohne nilpotente Ideale ($\neq 0$) bzw. nilpotente Rechtsideale ($\neq 0$). Hiernach ist ein in J/B liegendes minimales Rechtsideal weder nilpotent noch idempotent. Dies bedeutet aber $J = B$, also $B = L = N = J$.

SATZ 5.2. Es gilt in *MHR*-Ringen A stets $J \subseteq Z$. Hat insbesondere der *MHR*-Ring A ein Rechtseinselement e , so ist $J = Z = G$.

BEWEIS. Es sei erstens A ein beliebiger *MHR*-Ring. Nach [9] ist $Z = Z_l \cap Z_r$, wobei Z_l (bzw. Z_r) die Summe aller l -Zeroideale (bzw. r -Zeroideale) von A bezeichnet, die mit dem Durchschnitt aller maximalen l -Zerofaktorideale (bzw. r -Zerofaktorideale) übereinstimmt. Diese maximalen l - (bzw. r -) Zerofaktorideale sind nach [9] Primideale in A . Daher ergibt sich

³ Vgl. F. SZÁSZ, Beziehungen zwischen den Abelschen Gruppen und den assoziativen Ringen mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, II. *Magyar Matematikai Kongresszus* (Budapest, 1960), *Előadaskivonatok*, 1a, S. 60—62.

auch $Z \supseteq J$, denn B ist der Durchschnitt aller Primideale, und nach Satz 5.1 gilt $J = B$.

Es sei nun A ein *MHR*-Ring mit Rechtseinselement e . Wir werden beweisen, daß jedes Element $c (\neq 0)$ von jedem echten zweiseitigen Ideal $C (\neq A)$ ein Linksnulleiter ist. Im entgegengesetzten Falle existiert nämlich ein solches minimales Hauptideal $(d)_r \subseteq C$, daß d kein Linksnulleiter von A ist. Hiernach ergibt sich $(d)_r = (d^2)_r$, also auch $d = d^2 a$ ($a \in A$) wegen $e \in A$, weil dann mit d auch d^2 kein Linksnulleiter in A ist. Da offenbar $e - da \notin C$ besteht, gilt es auch $e - da \neq 0$. Dies ist aber unmöglich wegen $d(e - da) = 0$ und wegen der obigen Wahl von d . Daher ist jedes echte Ideal C von A ein *l*-Zerofaktorideal, und somit besteht $Z_l = J$, denn in A stimmen die primitiven Ideale und die maximalen Ideale untereinander überein (vgl. „*Nachträgliche Bemerkungen*“ unserer Arbeit [26]). Dann gilt aber $Z \subseteq Z_l = J \subseteq Z$, also $J = Z (= Z_l \subseteq Z_r)$.

Besitzt nun der *MHR*-Ring A ein Rechtseinselement e , so ist A/J ein Artinscher halbeinfacher Ring, also halbeinfach auch im Brown—McCoyschen Sinne. Hiernach gilt aber $J = G$, w. z. b. w.

BEISPIELE.

5.3. Ist $A = \{a, b\}$ mit $a + a = b + b = a^2 = ab = ba = b^2 + b = 0$, so ist A endlich, und zwar $|A| = 4$. Ferner gelten $Z = A$, $B = J = G = \{a\} \neq A$, also $G \subset Z$. A hat kein Rechtseinselement.

5.4. Es sei A der im Beispiel 4.2 betrachtete einfache *MHR*-Ring ohne Rechtseinselement. Dann gelten $B = J = 0$ und $G = Z = A$.

5.5. Ist $A = \{a, b\}$ mit $a + a = b + b = a^2 + a = b^2 = ba = ab + b = 0$, so gilt im endlichen Ring A ohne Rechtseinselement: $B = J = G = Z = \{b\} \neq A$.

5.6. Ist A der Ring ohne Rechtseinselement aller rationalen Zahlen mit geraden Zählern und mit ungeraden Nennern, so gelten in A , der kein *MHR*-Ring ist, $B = N = Z = 0$ und $J = G = A$. Ferner ist (0) in A offenbar ein Primideal, aber weder ein maximales Ideal noch ein primitives Ideal. (Vgl. „*Nachträgliche Bemerkungen*“ unserer Arbeit [26].)

BEMERKUNGEN. Nach den obigen Beispielen kann auch die allgemeine Frage gestellt werden, ob in allen *MHR*-Ringern das Brown—McCoysche Radikal notwendig ein Teil des Fuchsschen Radikales ist. Man kennt noch ebenfalls kein Kriterium dafür, daß der Faktorring A/Z eines *MHR*-Ringes A nach seinem Fuchsschen Radikal Z halbeinfach im Sinne von Fuchs sei. Da eine transfinite Potenz des Jacobsonischen Radikales J von jedem *MHR*-Ring A verschwindet, d. h. $J^\gamma = 0$ mit einer Ordnungszahl γ gilt (vgl. [26]), kann es auch folgendes gefragt werden: zu welchen Ordnungszahlen γ gibt es wenigstens einen *MHR*-Ring A mit Radikal J , für das die Bedingungen

$J^\gamma = 0$, $J^\beta \neq 0$, $\beta < \gamma$ gelten? Dies steht in Beziehung mit dem Problem, ob es zu welchen Ordnungszahlen γ wenigstens einen *MHR*-Ring A mit Rechtseinselement e und mit Radikal J derart gibt, daß der Linksannulator von J^β ($\beta \leq \gamma$) in A genau der β -te transfinite Rechtssockel von A ist. Es wäre merkwürdig, auch einen *MHR*-Radikalring ohne die Minimalbedingung für Hauptlinksideale zu konstruieren, obwohl wir vermuten, daß ein solcher Radikalring vielleicht überhaupt nicht existieren kann. Bezüglich hierher gehörender eventueller Verallgemeinerungen verweisen wir noch auf eine Arbeit von Herrn H. J. HOEHNE (Nilpotenzkriterien, *Math. Annalen*, **132** (1957), S. 404—411).

§ 6. *MMHR*-Ringe und regelmäßige Hauptrechtsideale

Nach der im § 1 ergebenen Definition ist jeder halbeinfache Artinsche Ring ein *MMHR*-Ring. Sowohl die ringtheoretische direkte Summe von einfachen Artinschen Ringen (die im allgemeinen kein Artinscher Ring ist), als auch jeder Zeroring $Z(p^\infty)$ ist ein *MHR*-Ring, aber im allgemeinen kein *MMHR*-Ring. Dagegen sind die Artinschen Ringe A ohne $Z(p^\infty)$ in A^+ immer *MMHR*-Ringe (vgl. FUCHS [7]).

SATZ 6.1. *Ist A ein *MMHR*-Ring mit Radikal J , so ist A/J stets ein Artinscher halbeinfacher Ring. Dann ist die additive Gruppe A^+ von A notwendig die direkte Summe einer torsionsfreien vollständigen Gruppe und endlich vieler ihrer reduzierten p -Komponenten.*

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, daß jeder halbeinfache *MMHR*-Ring $B (= A/J)$ ein Artinscher Ring ist. Ist $B = \sum e_\alpha B$ ($e_\alpha^2 = e_\alpha$), so gilt $(e_1)_r \subset (e_1 + e_2)_r \subset (e_1 + e_2 + e_3)_r \subset \dots$ durch geeignete Wahl der idempotenten Elemente $e_1, e_2, \dots$, deren jedes endliche System als ein System paarweise orthogonaler idempotenter Elemente gewählt werden kann. Da A ein *MMHR*-Ring ist, gilt $B = (e_1 + e_2 + \dots + e_s)_r$ mit einem Index s . Hiernach hat B ein Linkseinselement $e_1 + e_2 + \dots + e_s$, und deshalb ist B ein halbeinfacher Artinscher Ring.

Ist nun A ein *MHR*-Ring mit $Z(p^\infty) \subseteq A^+$, so ist A kein *MMHR*-Ring wegen $Z(p^\infty) \cdot A = 0$ nach dem Satz 3.1. Also ist die maximale vollständige Untergruppe eines *MMHR*-Ringes A stets torsionsfrei. Ist ferner $a_p \neq 0$ mit $O(a_p) = p$, so gilt $(a_p)_r \subset (a_{p_1} + a_{p_2})_r \subset (a_{p_1} + a_{p_2} + a_{p_3})_r \subset \dots$. Da A ein *MMHR*-Ring ist, so hat A tatsächlich nur endlich viele verschiedene p -Komponenten. Die Anwendung der Resultate von § 3 beendet nun den Beweis.

BEMERKUNGEN UND BEISPIELE.

1. Die erwähnte Gestalt von A^+ eines $MMHR$ -Ringes A ist nur eine notwendige Bedingung bezüglich A^+ über A^+ einen $MMHR$ -Ring A zu konstruieren. Sind insbesondere alle p -Komponenten A_p^+ beschränkt, so ist diese stärkere Bedingung schon sicher hinreichend. Ein genaueres Kriterium ist noch unbekannt.

2. Ist A die direkte Summe aller Zeroringe $Z(p^k)$ ($k = 1, 2, \dots$ usw.), so ist A ein $MMHR$ -Ring mit unbeschränkter periodischer additiver Gruppe. (Hierbei ist p festgewählt.)

3. Die ringtheoretische direkte Summe A von unendlich vielen Exemplaren der untereinander isomorphen endlichen Primkörper K_p ist sicher ein MHR -Ring, aber kein $MMHR$ -Ring, obwohl $pA = 0$ gilt. Hier können die Exemplare K_p durch die vollen Matrizenringe $(K_p)_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$ usw.) derart ersetzt werden, daß A ebenfalls ein MHR -Ring mit $pA = 0$ aber kein $MMHR$ -Ring bleibt.

Nun möchten wir die Untersuchungen von DIEUDONNÉ und HOPKINS ([5], [12]) über den Sockel A_1 von A ergänzen und fortentwickeln. Wir benützen dafür den Begriff der regelmäßigen Hauptideale (s. § 1) und die folgenden Bezeichnungen. Ist A ein beliebiger Ring mit Rechtssockel (kurz nur Sockel) A_1 und mit den homogenen Komponenten H_μ [13], so gilt $A_1 = \sum_{\mu \in \Omega} \oplus H_\mu$. (H_μ ist die Summe aller zu einem festen minimalen Rechtsideale R von A A -isomorphen Rechtsideale von A .) Es sei ferner N_μ die Summe aller nilpotenten Rechtsideale von A in H_μ , und M_μ ein Rechtsideal von A in H_μ mit $H_\mu = M_\mu \oplus N_\mu$. Bekanntlich ist jedes Rechtsideal sowohl von M_μ als auch von H_μ sicher ein Rechtsideal ebenfalls von A [5]. Es sei nun N die Summe aller N_μ , N^* die Summe einiger, endlich vieler, festgewählter N_μ ; H^* die Summe der entsprechenden (d. h. zu den in N^* liegenden N_μ gehörenden) H_μ und M^* die Summe der entsprechenden M_μ . Es gilt der folgende

SATZ 6.2. I. Ist eA ($e^2 = e$) ein regelmäßiges Hauptideal von A im Sockel A_1 , so gilt $eA = eAe$, und jedes Rechtsideal von eA ist ein Rechtsideal ebenfalls von A . Ferner ist eA ein Artinscher halbeinfacher Ring, und es gilt auch $eN = 0$.

II. Ist nun $N_0 = Ne$ und $n \in N_0$, so bestehen $(e + n)^2 = e + n$ und $eA \oplus N = (e + n)A \oplus N$. Ferner ist $(e + n)A$ mit eA ($e^2 = e, n \in Ne$) ebenfalls ein regelmäßiges Hauptideal. Die Abbildung $ex \rightarrow (e + n)x$ ($x \in A$) ist ein A -Isomorphismus von eA auf $(e + n)A$ und aus $(e + n_1)A = (e + n_2)A$ folgt notwendig $n_1 = n_2$ ($n_i \in Ne$). Es gelten auch die Beziehungen $A(1 - e) \subseteq (1 - e - n)A$ und $A(1 - e - n) \subseteq (1 - e)A$.

III. Besteht umgekehrt $R \oplus N = eA \oplus N$, wobei R ein beliebiges Rechtsideal, eA ein regelmäßiges Hauptideal von A und $e^2 = e$ ist, so ist R notwendig ein regelmäßiges Hauptideal von A , und es existiert ein $m \in Ne$ mit $R = (e + m)A$.

BEWEIS. Es seien $Q_e = (1 - e)AeA(1 - e)$ und $B_e = eA(1 - e) + AeA(1 - e)$, wobei eA ($e^2 = e$) regelmäßig ist, und in A_1 liegt. Dann ist B_e ein Linksideal von A , und es gelten $B_e = Q_e + eA(1 - e)$ und $B_e^k = Q_e^k + eA(1 - e)Q_e^{k-1}$ ($k = 2, 3, 4, \dots$). Da eA regelmäßig ist, existiert ein Exponent l mit $Q_e^l = 0$, also mit $B_e^{l+1} = 0$. Dann ist aber $D_e = eA \cap (B_e + B_eA)$ sowohl idempotent wegen $e^2 = e$ und $D_e \subseteq eA \subseteq A_1$ als auch nilpotent wegen $B_e^{l+1} = 0$. Also gelten $D_e = 0$ und $eA = eAe$ wegen $eA(1 - e) \subseteq D_e (= 0; = eA \cap (B_e + B_eA))$. $A = eA \oplus (1 - e)A$ und $eA = eAe$ ($e^2 = e$) bedeuten aber, daß jedes Rechtsideal von eA ebenfalls ein Rechtsideal von A ist. Hiernach ist eA ein halbeinfacher Artinscher Ring.

Aus $eA \cap N = 0$ folgt offenbar $eN = 0$.

Ist nun $N_0 = Ne$ und $n \in N_0$, so gilt $(e + n)^2 = e + n$ wegen $ne = n$, $en = 0$ und $n^2 = 0$. Da aber $ea = (e + n)a - na$ und $(e + n)b = eb + nb$ bestehen, ist $eA \oplus N = (e + n)A \oplus N$. Ein elementares Rechnen zeigt nun, daß die Kerne K_1 bzw. K_2 der A -Homomorphismen $\varphi_1: x \rightarrow ex$ ($x \in A$) bzw. $\varphi_2: x \rightarrow (e + n)x$ ($x \in A$) übereinstimmen, und deshalb ist die Abbildung $\varphi: ex \rightarrow (e + n)x$ ein A -Isomorphismus von eA auf $(e + n)A$. (Es gelten nämlich $K_1 \subseteq K_2$ und $K_2 \subseteq K_1$.)

Es seien nun $Q_e^l = 0$ und $Q_{e+n} = (1 - e - n)A(e + n)A(1 - e - n)$. Wir möchten zeigen, daß Q_{e+n} nilpotent, d. h. $(e + n)A$ regelmäßig in A ist. Dies kann wegen $Q_{e+n} \subseteq \{Q_e, N\}$ folgenderweise eingesehen werden. Jedes Element von $\{Q_e, N\}^{2l}$ ist die Summe gewisser Produkte P , deren Faktoren zur mengentheoretischen Vereinigung $Q_e \cup N$ gehören. Dann gilt aber sicher $\{Q_e, N\}^{2l} = 0$. Hat nämlich ein Produkt P keinen Faktor aus N , so gilt $P \in Q_e^{2l}$, also $P = 0$ wegen $Q_e^l = 0$. Besitzt nun ein Produkt P genau einen Faktor n aus N , so ist $P = q_1 q_2 \dots q_s n q'_1 q'_2 \dots q'_t$ mit $q_i, q'_j \in Q_e$, $s \geq 0, t \geq 0$. (Das leere Produkt sei nach Definition $1 \in I$.) In diesem Ausdruck ist wegen $(l - 1) + 1 + (l - 1) < 2l$ entweder $s \geq l$ oder $t \geq l$, und somit gilt auch $P = 0$ wegen $Q_e^l = 0$. Enthält drittens ein Produkt P wenigstens zwei Faktoren aus N , so ist ebenfalls $P = 0$ wegen $N^2 = 0$, $AN \subseteq N$ und $NA \subseteq N$. Deshalb ist $(e + n)A$ wirklich regelmäßig in A , wenn eA das gleiche ist.

Besteht ferner $(e + n_1)A = (e + n_2)A$ ($n_i \in N_0 = Ne$), wobei $eA \subseteq A_1$ regelmäßig ist, so existiert ein $a \in A$ mit $(e + n_1)e = (e + n_2)a$. Folglich ergibt sich $n_2 - n_1 = (n_2 - n_1)e = n_2e - (ea + n_2a - e) = (e + n_2)(e - a)$. Hiernach gilt aber $n_2 - n_1 \in N \cap (e + n_2)A$, also auch $n_2 - n_1 = 0$ und $n_2 = n_1$.

Da die Abbildung $ex \rightarrow (l+u)x$ nach den Vorigen ein A -Isomorphismus ist, und $eA = eAe$, $(e+n)A = (e+n)A(e+n)$ gelten, bestehen auch

$$\begin{aligned} A(1-e) &= eA(1-e) + (1-e)A(1-e) = (1-e)A(1-e) \subseteq (1-e)A = \\ &= (1-e-n)A, \end{aligned}$$

und wegen Symmetrie auch $A(1-e-n) \subseteq (1-e)A$. Dies bedeutet aber, daß jeder Linksannullator von e ebenfalls ein Rechtsannullator von $e+n$ ist, bzw. daß jeder Linksannullator von $e+n$ ebenfalls ein Rechtsannullator von e ist.

Gilt zum Schluß $R \oplus N = eA \oplus N$ mit einem beliebigen Rechtsideal R und mit einem regelmäßigen Hauptideal eA ($e^2 = e$) von A in A_1 , so gilt $e = f + n$ mit $f \in R$, $n \in N$. Aus $e^2 = e$, $N^2 = 0$, $RN = 0$ und $R \cap N = 0$ erhält man aber $f^2 + fn + nf + n^2 = f + n$, also $f^2 = f$ und $nf = n$. Da $e = f^2 + n$, $f \in R$ und $fA \oplus N \supseteq eA \oplus N = R \oplus N \supseteq fA \oplus N$ bestehen, und der Verband der Untergruppen von A^+ modular ist, ergibt sich $R = fA$ mit $f = e - n$. (Offensichtlich gelten nämlich $fA \subseteq R$, $fA + N = R + N$ und $fA \cap N = R \cap N (= 0)$, und daher folgt unsere Behauptung.)

SATZ 6.3. *Ist insbesondere A entweder ein MMHR-Ring, oder ein Artinscher Ring, so ist M^* in A stets ein regelmäßiges Hauptideal.*

BEWEIS. Da M^* die Summe endlich vieler idempotenter minimaler Rechtsideale $e_1A, \dots, e_nA$ ($e_i^2 = e_i$) von A in H^* ist, kann es $e_{i+1} \in (1-e_i) \dots (1-e_2)(1-e_1)A$ wegen der Anwendung klassischer Methoden vorausgesetzt werden. Hiernach hat aber M^* ein Linkseinselement e , d. h. $M^* = eA$ ($e^2 = e$). Es genügt zu zeigen, daß $Q_e = (1-e)AeA(1-e)$ nilpotent ist. Im Falle $d^* \in D^* = H^* \cap (1-e)A$ existieren solche Elemente $a_1, a_2 \in A$ und $n \in N$, daß $d^* - ea_1 + n = (1-e)a_2$ ist, denn es gilt $H^* = M^* \oplus N^*$. Nach einer Linksmultiplikation mit e erhält man $e^2a_1 + en = 0$, folglich auch $ea_1 = 0$ wegen $eA \cap N = 0$. Dies bedeutet aber, daß $d^* = n$, also $D^* \subseteq N^*$. Hiernach gilt nun $Q_e^2 = 0$ wegen $Q_e \subseteq D^* \subseteq N^* \subseteq N$ und wegen $N^2 = 0$, und somit ist M^* tatsächlich regelmäßig in A .

BEMERKUNG 6.4. Natürlich kann auch die Frage gestellt werden, ob sich die Voraussetzungen des Satzes 6.2 bzw. des Satzes 6.3 noch wie weit abschwächen lassen. Ferner kennen wir bisher ebenfalls nicht die Existenz eines beliebigen Ringes (bzw. MHR-Ringes) A derart, daß $(1-e)A(1-e)$ kein nilpotenter Ring, aber $(1-e)AeA(1-e)$ ein nilpotenter Ring ist. Dies steht in Zusammenhang mit der Möglichkeit, daß sich die „regelmäßigen“ Hauptideale vielleicht auch anders definieren lassen. Es wäre also merkwürdig, diese Beziehungen ausführlicher zu untersuchen.

§ 7. Über die *MHU*-Ringe

V. I. ŠNEIDMYULLER [22] betrachtete die Klasse K der Ringe mit Minimalbedingung für alle Unterringe. Jeder Ring aus dieser Klasse K ist ein *MHU*-Ring im Sinne der Definition im § 1. Ein unendlicher Zeroring A mit $pA = 0$ gehört nicht zu dieser Klasse K , obwohl dieser Ring A ein *MHU*-Ring ist. Ferner haben wir im unseren Satz 3.3 gesehen, daß jeder nilpotente *MH₁R*-Ring auch ein *MHU*-Ring ist. Die endlichen Ringe sind natürlich *MHR*-Ringe und auch *MHU*-Ringe. $Z(p^\infty)$ ist ferner ebenfalls sowohl ein *MHR*-Ring als auch ein *MHU*-Ring, obwohl $Z(p^\infty)$ unendlich ist. Dagegen ist der Ring I der ganzen Zahlen weder ein *MHR*-Ring noch ein *MHU*-Ring. Der rationale Zahlkörper K_0 ist offenbar ein *MHR*-Ring, aber kein *MHU*-Ring. Ist nun $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ ein Ring mit $a_n + a_n = a_n^{n+1} = a_n a_m + a_m a_n = 0$ ($m \neq n$), so ist A ein *MHU*-Ring, aber kein *MHR*-Ring. Gehört nun der Ring A zur Klasse K^* aller solchen Ringe, deren jeder endlich erzeugbare echte Unterring ein Hauptideal in A ist, so ist A genau dann ein *MHU*-Ring, wenn er auch ein *MHR*-Ring ist. Neulich haben wir diese Klasse K^* ganz explizit bestimmt (vgl. in speziellem Falle auch Satz 3 von [25]).⁴ Die endlichen Körper, die im allgemeinen nicht zur Klasse K^* gehören müssen, zeigen uns die Existenz solcher Ringe, die gleichzeitig *MHR*-Ringe und auch *MHU*-Ringe sind. Jeder unendliche *MHR*-Ring A (*MHU*-Ring A) aus der Klasse K^* hat eine periodische additive Gruppe A^+ mit $A_p \simeq Z(p^\infty)$ bzw. $\simeq Z(p^\infty) \oplus I/(p)$ oder $|A_p| < \infty$ für jede Primzahl p . Dies ist ein tieferes Korollar von [25].

Die folgenden Tatsachen bezüglich der *MHU*-Ringe können aber viel leichter eingesehen werden. Sowohl jedes homomorphe Bild als auch jeder Unterring eines *MHU*-Ringes ist ebenfalls ein *MHU*-Ring. Ferner hat jeder *MHU*-Ring ($\neq 0$) in jedem seiner Unterringe ($\neq 0$) minimale Unterringe ($\neq 0$), die Ringe von Primzahlordnung (also Zeroringe oder Primkörper) sind (vgl. Lemma 1 von [24]).

SATZ 7.1. *Die additive Gruppe eines *MHU*-Ringes ist periodisch. Jeder *MHU*-Schiefkörper ist ein kommutativer, absolut algebraischer Körper der Charakteristik p ($\neq 0$). Ist ferner A ein Nilring, der gleichzeitig sowohl ein *MHU*-Ring als auch ein *MHR*-Ring ist, so bilden die Elemente von A bezüglich der Verknüpfung $r_1 \circ r_2 = r_1 + r_2 - r_1 r_2$ stets eine (nicht notwendig auflösbare) periodische Gruppe G , die das direkte Produkt ihrer Sylowschen p -Untergruppen ist. Die Gruppe G besitzt dann ein transfinites auflösbares invariantes System.*

⁴ Wir verweisen noch auf die in ² zitierte Arbeit.

BEWEIS. Ist P das maximale periodische Ideal des MHU -Ringes A , so ist $(A/P)^+$ torsionsfrei. Da A/P keinen Unterring einer Ordnung p hat, gilt notwendig $A = P$.

Da der Ring I der ganzen rationalen Zahlen kein MHU -Ring ist, hat jeder MHU -Schiefkörper A eine Charakteristik $p (\neq 0)$, und besitzt A lauter absolut algebraische Elemente wegen des Abbrechen jeder absteigenden Kette $\{x\} \supset \{x^2\} \supset \dots \supset \{x^{2^k}\} \supset \dots$ in A . Also ist A nach einem Satz von JACOBSON [13] kommutativ, denn es gibt zu jedem $x \in A$ einen Exponenten n mit der Bedingung $x^n = x$.

Ist nun A ein MHU -Nilring, der gleichzeitig auch ein MHR -Ring ist, so bilden die Elemente von A bekanntlich eine Gruppe G bezüglich der Operation $a_1 \circ a_2 = a_1 + a_2 - a_1 a_2$, denn diese Verknüpfung ist assoziativ. Ferner ist 0 das Einselement dieser Gruppe, und im Falle $a'' = 0$ ist $b = -\{a + a^2 + \dots + a^{n-1}\}$ das Inverselement von a in G . Da im Falle $O^+(a) = m (\neq 0, \in I)$ der Unterring $\{a\}$ von A endlich ist, so ist die Ordnung von a in G ebenfalls endlich. Also ist G periodisch. Jede p -Komponente A_p des Ringes A ist eine Untergruppe in der Gruppe G , und zwar kann es gezeigt werden, daß G das direkte Produkt der Sylowschen p -Untergruppen A_p ist. (Für den Beweis verweisen wir auf [22].) Jedes Ideal von A ist ferner ein Normalteiler in G . Da A ein MHR -Nilring ist, so existiert eine Ordnungszahl γ mit $A^\gamma = 0, A^\beta = 0, \beta < \gamma$ (vgl. [26]). Betrachten wir nun das transfinite invariante System $A \supset A^2 \supset \dots \supset A^\omega \supset \dots \supset A^\gamma = 0$, das aus Normalteilern A^β von G besteht. Dann sind die Faktorgruppen $A^\beta / A^{\beta+1}$ bei jedem „Sprung“ $(\beta, \beta+1)$ kommutativ wegen $(a_1 \circ A^{\beta+1}) \circ (a_2 \circ A^{\beta+1}) = a_1 + a_2 + A^{\beta+1} = (a_2 \circ A^{\beta+1}) \circ (a_1 \circ A^{\beta+1})$, w. z. b. w.

BEMERKUNG 7.2. Wir sahen schon, daß die Klassen von MHR -Ringern bzw. von MHU -Ringern untereinander verschieden sind. Nun stellt sich eine Frage, ob was ein Kriterium dafür ist, daß ein MHR -Ring auch ein MHU -Ring sei. Es kann auch die umgekehrte Frage betrachtet werden, d. h. genau wann folgt aus der MHU -Eigenschaft die MHR -Eigenschaft? Diese scheinen uns im allgemeinen schwer.

Anhang

Zum Schluß möchten wir einige allgemeinere offene Grundfragen bezüglich der MHR -Ringe erwähnen, die mit dem Gegenstand unserer Arbeit [26] und der soeben betrachteten Theorie eng zusammenhängen.

PROBLEM 1. Man untersuche die Minimalbedingungen in vollen Matrizenringen A_n ($n = 2, 3, 4, \dots$) über einem MHR -Ring A !

PROBLEM 2. Gibt es einen *MHR*-Ring ohne die Minimalbedingung für endlich erzeugte Rechtsideale?

PROBLEM 3. Gibt es einen *MHR*-Ring mit endlich vielen Hauptrechtsidealen und mit unendlich vielen Hauptlinksidealen?

PROBLEM 4. Was ist ein Kriterium dafür, daß ein *MHR*-Ring auch ein Ring mit Minimalbedingung für Hauptlinksideale sei?

PROBLEM 5. Gibt es einen *MHR*-Ring ohne die Minimalbedingung für die Potenzen eines festen Hauptrechtsideales?

PROBLEM 6. Genau wann ist ein *MHR*-Ring auch ein *MMHR*-Ring?

PROBLEM 7. Welche *MHR*-Ringe können in einen *MHR*-Ring mit Einselement eingebettet werden?

PROBLEM 8. Man ergebe gewisse Verallgemeinerungen der Theorie von gewöhnlichen primären bzw. vollständig primären Ringe durch [13], durch [26], und durch die Ergebnisse dieser Arbeit!

PROBLEM 9. Man untersuche im Zusammenhang mit Problem 8 die eventuellen verschiedenen direkten Zerlegungen von *MHR*-Ringen A , deren Radikal J von Null verschieden ist!

(Eingegangen am 17. Mai 1960.)

Literaturverzeichnis

- [1] E. ARTIN, C. J. NESBITT and R. M. THRALL, *Rings with minimum condition* (Ann Arbor, 1944).
- [2] R. BAER, Radical ideals, *Amer. Journ. Math.*, **65** (1943), S. 537—568.
- [3] B. BROWN and N. H. MCCOY, Radicals and subdirect sums, *Amer. Journ. Math.*, **69** (1947), S. 46—58.
- [4] M. DEURING, *Algebren*, Ergebnisse der Math. Wiss. **4** (Berlin, 1947).
- [5] J. DIEUDONNÉ, Sur le socle d'un anneau et les anneaux simples infinis, *Bull. Soc. Math. France*, **70** (1942), S. 46—75.
- [6] C. C. FAITH, Rings with minimum condition on principal ideals, *Archiv der Math.*, **10:5** (1959), S. 327—330.
- [7] L. FUCHS, *Abelian groups* (Budapest, 1958).
- [8] L. FUCHS, Wann folgt die Maximalbedingung aus der Minimalbedingung?, *Archiv der Math.*, **8** (1957), S. 317—319.
- [9] L. FUCHS, On a new type of radical, *Acta Sci. Math. Szeged*, **16** (1955), S. 43—53.
- [10] L. FUCHS and T. SZELE, On Artinian rings, *Acta Sci. Math. Szeged*, **17** (1956), S. 30—40.
- [11] A. GERTSCHIKOFF, Über Ringe, die in eine Summe von Körpern zerlegbar sind., *Mat. Sbornik, N. S.*, **7** (1940), S. 591—597 (russisch).
- [12] CH. HOPKINS, Rings with minimal condition for left ideals, *Annals of Math.*, **40** (1949), S. 712—730.
- [13] N. JACOBSON, *Structure of rings*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., **37** (1956).

- [14] J. KAPLANSKY, Topological representation of algebras. II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **68** (1950), S. 62—75.
- [15] A. KERTÉSZ, Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), S. 235—257.
- [16] A. KERTÉSZ, Eine Charakterisierung der halbeinfachen Ringe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), S. 343—344.
- [17] L. KOVÁCS, A note on regular rings, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), S. 465—468.
- [18] J. LEVITZKI, On the radical of a general ring, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), S. 462—466.
- [19] N. H. MCCOY, Prime ideals in general rings, *Amer. Journ. Math.*, **71** (1949), S. 823—833.
- [20] J. VON NEUMANN, *Continuous geometry* (Princeton, 1937).
- [21] L. RÉDEI, *Algebra. I* (Leipzig, 1959).
- [22] V. I. ŠNEĬDMYULLER, Unendliche Ringe mit endlichen absteigenden Ketten der Unterringe, *Mat. Sbornik, N. S.*, **27** (1950), S. 219—228 (russisch).
- [23] O. STEINFELD, On ideal-quotients and prime ideals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), S. 289—298.
- [24] F. SZÁSZ, Note on rings in which every proper left-ideal is cyclic, *Fund. Math.*, **44** (1957), S. 330—332.
- [25] F. SZÁSZ, Die explizite Bestimmung von einigen Klassen der assoziativen Ringe, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III*, **7** (1959), S. 107—110.
- [26] F. SZÁSZ, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptideale. I, *Publ. Math. Debrecen*, **7** (1960), S. 54—64.
- [27] T. SZELE, Die Ringe ohne Linksideale, *Bul. Sti. Acad. Repub. Popul. Romane*, **1** (1949), S. 783—789.
- [28] T. SZELE, Nilpotent Artinian rings, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955), S. 71—78.
- [29] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra. II* (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955).

EIN ZERSPALTUNGSSATZ FÜR OPERATOREN IM HILBERTRAUM

Von

H. LANGER (Dresden)

(Vorgelegt von B. SZ.-NAGY)

1. Wir beweisen in dieser Note durch eine einfache Konstruktion, daß eine Kontraktion T in einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$ von einem Teilraum $\mathfrak{H}_0$ reduziert wird, in dem sie eine unitäre Transformation induziert, und daß T im orthogonalen Komplement $\mathfrak{H}_1$ von $\mathfrak{H}_0$ die Eigenschaft hat, daß zu jedem $x \in \mathfrak{H}_1$ ($x \neq 0$) eine ganze Zahl n existiert, so daß $\|T^{(n)}(x)\| < \|x\|$ gilt.¹ Dieses Ergebnis und damit zusammenhängende einfache Spektralaussagen werden anschließend mit Hilfe der Cayleytransformation auf abgeschlossene Operatoren A übertragen, deren Definitionsbereich $\mathfrak{D}(A)$ die Beziehung $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{D}(A^*)$ erfüllt und die einen nichtnegativen Imaginärteil haben. Spezielle Operatoren, die diesen Voraussetzungen genügen, sind z. B. die dissipativen Operatoren in [2].

Herrn Prof. DR. B. SZ.-NAGY danke ich für seine freundliche Unterstützung beim Zustandekommen dieser Veröffentlichung.

2. SATZ 1. Ist T eine Kontraktion in einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$, dann ist T die orthogonale Summe zweier Transformationen T_0 und T_1 . Dabei ist T_0 in dem zugehörigen Hilbertraum $\mathfrak{H}_0$ unitär, und T_1 in $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0$ hat die Eigenschaft, daß zu jedem $x \in \mathfrak{H}_1$ ($x \neq 0$) eine ganze Zahl n existiert, so daß $\|T_1^{(n)}x\| < \|x\|$ gilt.

BEWEIS. Es sei

$$(1) \quad \mathfrak{H}_0 = \{x: \|T^{(n)}x\| = \|x\| \text{ für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Aus $x \in \mathfrak{H}_0$ folgt für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ wegen $\|T^*\| = \|T\| \leq 1$

$$\begin{aligned} \|T^{*(n)}T^{(n)}x - x\|^2 &= \|T^{*(n)}T^{(n)}x\|^2 - 2\|T^{(n)}x\|^2 + \|x\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 - \|T^{(n)}x\|^2 = 0, \end{aligned}$$

d. h.

$$(2) \quad T^{*(n)}T^n x = T^n T^{*n} x = x \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots$$

¹ Für eine lineare, beschränkte Transformation B sei $B^{(n)} = B^n$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ und $B^{(n)} = B^{*|n|}$ für $n = -1, -2, \dots$, vgl. [1].

Umgekehrt folgt aus $T^{*(n)} T^{(n)} x = x$ auch

$$\|T^{(n)} x\|^2 = (T^{*(n)} T^{(n)} x, x) = \|x\|^2 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Es ist also

$$(3) \quad \mathfrak{H}_0 = \{x: T^{*(n)} T^{(n)} x = x \text{ für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Aus der Darstellung (3) von $\mathfrak{H}_0$ folgen die Linearität und die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{H}_0$, also ist $\mathfrak{H}_0$ ein Teilraum von $\mathfrak{H}$. Ist $x \in \mathfrak{H}_0$, dann folgt für $y = Tx$ aus (1)

$$\|T^n y\| = \|T^{n+1} x\| = \|Tx\| = \|y\| \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

und wegen $T^*Tx = x$

$$\|T^{*n} y\| = \|T^{*n} Tx\| = \|T^{*n-1} x\| = \|Tx\| = \|y\| \quad \text{für } n = 1, 2, \dots,$$

d. h. $Tx \in \mathfrak{H}_0$.

Entsprechend zeigt man $T^*x \in \mathfrak{H}_0$ für $x \in \mathfrak{H}_0$. Aus $T\mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}_0$ und $T^*\mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}_0$ folgt aber für $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0$ auch $T\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_1$ und $T^*\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_1$.

Bezeichnet schließlich T_0 bzw. T_1 den von T in $\mathfrak{H}_0$ bzw. $\mathfrak{H}_1$ induzierten Operator, dann folgt aus (2), daß T_0 unitär ist. Die Aussage über T_1 ergibt sich aus (1) und der Beziehung $(T_1)^* = (T^*)_1$, wobei $(T^*)_1$ den von T^* in $\mathfrak{H}_1$ induzierten Operator bezeichnet. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Der Teilraum $\mathfrak{H}_0$ läßt sich offensichtlich auch folgendermaßen charakterisieren:

$\mathfrak{H}_0$ ist maximaler Teilraum von $\mathfrak{H}$ in dem Sinne, daß es keinen ihn echt enthaltenden Teilraum $\mathfrak{H}'_0$ gibt, so daß $T\mathfrak{H}'_0 \subset \mathfrak{H}'_0$ und $T^*\mathfrak{H}'_0 \subset \mathfrak{H}'_0$ gilt und der von T in $\mathfrak{H}'_0$ induzierte Operator unitär ist.

Ist λ ein Eigenwert einer Kontraktion T mit $|\lambda| = 1$ und zugehörigem Eigenelement x_0 , dann ist bekanntlich $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von T^* mit dem gleichen Eigenelement x_0 ([3], S. 440; vgl. auch [4]). Die in Satz 1 erklärte Transformation T_1 hat folglich keine Eigenwerte vom Betrag 1. Weiterhin liegen auf der Einheitskreislinie keine Punkte des Residualspektrums $\sigma_r(T)$ ² einer Kontraktion T . Andernfalls folgte aus $\lambda \in \sigma_r(T)$, $|\lambda| = 1$ nach [5], S. 581, $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$, also $\lambda \in \sigma_p(T)$. Für die Transformation T_1 ist folglich die Einheitskreislinie ganz in $\sigma_e(T_1) \cup \varrho(T_1)$ enthalten.

3. A sei ein abgeschlossener Operator in $\mathfrak{H}$ mit in $\mathfrak{H}$ dichtem Definitionsbereich $\partial(A)$ und es gelte $\partial(A) \subset \partial(A^*)$. Dann sind die Operatoren $\operatorname{Re}(A) = \frac{A + A^*}{2}$ und $\operatorname{Im}(A) = \frac{A - A^*}{2i}$ auf der dichten Menge $\partial(A)$ definiert

² Für einen linearen abgeschlossenen Operator B seien das Spektrum $\sigma(B)$ und seine Teile $\sigma_p(B)$, $\sigma_c(B)$, $\sigma_r(B)$ sowie die Resolventenmenge $\varrho(B)$ definiert wie in [5], S. 599.

und symmetrisch, denn es ist (vgl. [3], S. 285, 289)

$$\left(\frac{A+A^*}{2}\right)^* \supseteq \frac{A+A^*}{2} \quad \text{und} \quad \left(\frac{A-A^*}{2i}\right)^* \supseteq \frac{A-A^*}{2i}.$$

Für $x \in \partial(A)$ gilt

$$Ax = \operatorname{Re}(A)x + i \operatorname{Im}(A)x.$$

Wir sagen, ein abgeschlossener Operator A mit $\partial(A) \subset \partial(A^*)$ habe einen nichtnegativen Imaginärteil, wenn

$$(\operatorname{Im}(A)x, x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \partial(A)$$

gilt.

Es existiere für den abgeschlossenen Operator A mit nichtnegativem Imaginärteil ein Punkt ζ mit $\zeta \in \varrho(A)$ und $\operatorname{Im}(\zeta) < 0$. Als Cayleytransformierte von A (vgl. [6], S. 398) bezeichnen wir den auf ganz $\mathfrak{H}$ durch die Gleichung

$$(4) \quad T = (A - \bar{\zeta}I)(A - \zeta I)^{-1} = I + (\zeta - \bar{\zeta})(A - \zeta I)^{-1}$$

definierten linearen Operator. T ist dann eine Kontraktion (vgl. [3], S. 424), denn es wird mit $y = (A - \zeta I)x$, $x \in \partial(A)$,

$$\|y\|^2 - \|Ty\|^2 = -4 \operatorname{Im}(\zeta) (\operatorname{Im}(A)x, x) \geq 0.$$

Aus (4) folgt noch $1 \notin \sigma_p(T)$, $\Re(T - I) = \partial(A)^{\perp}$ und $\Re(T^* - I) = \partial(A^*)$.

Ist umgekehrt T eine Kontraktion mit $1 \notin \sigma_p(T)$, dann existieren nach den Bemerkungen am Ende von Abschnitt 2 die (nicht notwendig beschränkten) Operatoren $(T - I)^{-1}$ und $(T^* - I)^{-1}$ und haben beide in $\mathfrak{H}$ dichte Definitionsbereiche. Wir setzen voraus, daß $\Re(T - I) \subset \Re(T^* - I)$ gilt.

Es sei ζ eine komplexe Zahl mit $\operatorname{Im}(\zeta) < 0$. Dann ist der Operator

$$(5) \quad A = (\zeta T - \bar{\zeta}I)(T - I)^{-1} = \zeta I + (\zeta - \bar{\zeta})(T - I)^{-1}$$

ein abgeschlossener Operator mit dichtem Definitionsbereich $\partial(A) = \Re(T - I)$.

Es ist $\partial(A) \subset \partial(A^*)$, und A hat einen nichtnegativen Imaginärteil, denn für $y \in \partial(A)$ ist mit $y = (T - I)x$

$$(\operatorname{Im}(A)y, y) = \operatorname{Im}(\zeta)(\|Tx\|^2 - \|x\|^2) \geq 0.$$

Die Transformationen (4) und (5) sind zueinander invers, d. h., ist A ein abgeschlossener Operator mit $\partial(A) \subset \partial(A^*)$ und nichtnegativem Imaginärteil und T seine Cayleytransformierte, dann besteht zwischen T und A auch die Beziehung (5).

Wir untersuchen die Beziehungen zwischen den Spektren von T und A . Den Formeln (4) und (5) entsprechen die Abbildungen

$$(6) \quad \lambda \rightarrow \nu(\lambda) = \frac{\lambda - \bar{\zeta}}{\lambda - \zeta} \quad \text{und} \quad \nu \rightarrow \lambda(\nu) = \frac{\zeta \nu - \bar{\zeta}}{\nu - 1}$$

³ $\Re(B)$ bezeichnet den Wertebereich des Operators B .

der geschlossenen komplexen Ebene auf sich. Aus (4) und (5) folgt (vgl. [6], S. 401), daß einem Eigenwert λ von A eineindeutig ein Eigenwert ν von T entspricht, wobei zwischen λ und ν die Beziehungen (6) bestehen und die zugehörigen Eigenelemente übereinstimmen. Aus (4), (5) und (6) folgt für $\lambda \notin \sigma_p(A)$, d. h. $\nu \notin \sigma_p(T)$

$$(T - \nu I)y = (1 - \nu)(A - \lambda I)x$$

mit $y \in \mathfrak{H}$, $x \in \mathfrak{o}(A)$ und $y = (A - \lambda I)x$. $A - \lambda I$ bildet also $\mathfrak{o}(A)$ genau dann eineindeutig auf $\mathfrak{H}$ (bzw. auf einen nicht dichten Teil von $\mathfrak{H}$) ab, wenn $T - \nu I$ den Raum $\mathfrak{H}$ eineindeutig auf sich (bzw. auf einen nicht dichten Teil von $\mathfrak{H}$) abbildet, d. h., es ist $\lambda \in \mathfrak{o}(A)$ (bzw. $\lambda \in \sigma_r(A)$) genau dann, wenn $\nu \in \mathfrak{o}(T)$ (bzw. $\nu \in \sigma_r(T)$) gilt. Die Punkte $\lambda \in \sigma(A)$ (bzw. $\sigma_p(A)$, $\sigma_s(A)$, $\sigma_r(A)$) entsprechen also eineindeutig den Punkten $\nu \in \sigma(T)$ (bzw. $\sigma_p(T)$, $\sigma_s(T)$, $\sigma_r(T)$), wenn zwischen ν und λ die Relationen (6) bestehen.

SATZ 2. *A sei ein abgeschlossener Operator mit $\mathfrak{o}(A) \subset \mathfrak{o}(A^*)$ und nicht-negativem¹ Imaginärteil, für den eine komplexe Zahl ζ mit $\text{Im}(\zeta) < 0$ und $\zeta \in \mathfrak{o}(A)$ existiert. Dann ist A die orthogonale Summe eines selbstadjungierten Operators A_0 in $\mathfrak{H}_0$ und eines abgeschlossenen Operators A_1 in $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$. Die untere Halbebene $\text{Im}(z) < 0$ gehört zu $\mathfrak{o}(A)$; die reelle Achse ist in $\sigma_r(A_1) \cup \mathfrak{o}(A_1)$ enthalten.*

BEWEIS. T sei die Cayleytransformierte von A . Nach Satz 1 besitzt T eine Darstellung $T = T_0 \oplus T_1$, wobei T_0 unitär ist in $\mathfrak{H}_0$ und T_1 eine Kontraktion ist in $\mathfrak{H}_1$, für welche die Einheitskreislinie ganz in $\mathfrak{o}(T_1) \cup \sigma_r(T_1)$ enthalten ist. Es ist $1 \notin \sigma_p(T)$ und $\Re(T_1 - I) \subset \Re(T_1^* - I)$. A_0 (bzw. A_1) sei die nach (5) aus T_0 (bzw. T_1) gebildete Transformation mit nichtnegativem Imaginärteil. Dann ist

$$A = A_0 \oplus A_1,$$

denn es ist mit $x \in \mathfrak{o}(A)$ auch $P_0 x = x_0 \in \mathfrak{o}(A_0)$, $P_1 x = x_1 \in \mathfrak{o}(A_1)$ und $Ax_0 = A_0 x_0$, $Ax_1 = A_1 x_1$, wenn P_0 bzw. P_1 die orthogonale Projektion auf $\mathfrak{H}_0$ bzw. $\mathfrak{H}_1$ bezeichnet. Die Aussagen über das Spektrum von A und A_1 folgen aus den entsprechenden Aussagen über das Spektrum von T und T_1 im 2. Abschnitt.

FOLGERUNG 1. *Genügt A den Voraussetzungen von Satz 2, dann sind die zu zwei verschiedenen reellen Eigenwerten von A gehörenden Eigenelemente orthogonal, und kein reeller Punkt gehört zu $\sigma_r(A)$.*

FOLGERUNG 2. *Ein Operator A in einem n -dimensionalen unitären Raum mit positivem Imaginärteil (d. h. der Imaginärteil von A ist nichtnegativ, und*

¹ Die folgenden Aussagen gelten mutatis mutandis auch für Operatoren mit nicht-positivem Imaginärteil.

für mindestens ein Element x des Raumes ist $\left(\begin{smallmatrix} A - A^* \\ -2i \end{smallmatrix} x, x \right) > 0$) hat mindestens einen nichtreellen Eigenwert.

Andernfalls wäre nämlich der Operator A_1 in der Zerlegung von Satz 2 eigenwertfrei, also $\mathfrak{N}_1 = \{0\}$, d. h. A selbstadjungiert. Die Aussage von Folgerung 2 gilt nicht mehr in einem unendlichdimensionalen Raum. Das zeigt ein Beispiel in [2], S. 57.

(Eingegangen am 23. Mai 1960.)

Literaturverzeichnis

- [1] B. SZ.-NAGY, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. II, *Acta Sci. Math. Szeged*, **18** (1957), S. 1—14.
- [2] М. С. Бродский и М. С. Лившиц, Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, *Усп. Мат. Наук*, **13** (1958), S. 3—85.
- [3] F. RIESZ und B. SZ.-NAGY, *Vorlesungen über Funktionalanalysis* (Berlin, 1956).
- [4] B. SZ.-NAGY et C. FOIAŞ, Une relation parmi les vecteurs propres d'un opérateur de l'espace de Hilbert et de l'opérateur adjoint, *Acta Sci. Math. Szeged*, **20** (1959), S. 91—96.
- [5] N. DUNFORD and J. T. SCHWARTZ, *Linear operators. I* (New York, 1958).
- [6] И. С. Иохвидов и М. Г. Крейн, Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. I, *Труды Моск. Мат. Общ.*, **5** (1956), S. 367—432.

ÜBER EINEN KUSMINSCHEN SATZ

Von

P. SZÜSZ (Budapest)

(Vorgelegt von A. RÉNYI)

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. P. TURÁN zum 50. Geburtstag gewidmet

In der vorliegenden Note werden die folgenden Bezeichnungen benutzt:¹

α bedeutet stets eine zwischen Null und Eins gelegene reelle Zahl;

$a_1, a_2, \dots$ bedeuten die Teilnenner der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung von α , d. h.

$$(1) \quad \alpha = [0; a_1, a_2, \dots].$$

(Im Falle eines rationalen α bricht die Entwicklung (1) nach endlich vielen Schritten ab.) Ferner wird $a_0 = 0$ und

$$(2) \quad \zeta_0 = \alpha, \quad \zeta_n = a_n + \frac{1}{\zeta_{n+1}} \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$(3) \quad z_n = \frac{1}{\zeta_{n+1}} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

gesetzt. Offenbar gilt $0 < z_n \leq 1$. Es bezeichne $m_n(x)$ das Lebesguesche Maß der Menge der Zahlen α , für die $z_n \leq x$ gilt ($n = 0, 1, \dots$).

Noch GAUSS hat die Frage aufgeworfen, den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(x)$ zu bestimmen. In einem Brief an LAPLACE behauptete er, es sei ihm gelungen, die Limesrelation

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_n(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2}$$

zu beweisen. Sein Beweis wurde jedoch nicht veröffentlicht. Der erste bekannte Beweis von (4) rührt von KUSMIN [1] her.² Er bewies statt (4) sogar schärfer

$$(5) \quad m_n(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2} + O(q^{\sqrt{n}}),$$

wobei q eine Konstante bedeutet, die kleiner ist als 1. Aus (4) bzw. (5) haben KHINTCHINE [2], [3] und P. LÉVY [5] verschiedene Schlüsse gezogen, u. a. die Existenz der Dichte der k mit $a_k = r$ (r ist eine natürliche Zahl),

¹ Die Bezeichnungen stimmen mit denen von KHINTCHINE [4] überein.

² Der Kusminsche Beweis wurde auch im Buch [4] von KHINTCHINE wiedergegeben.

die Existenz von $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_1 a_2 \dots a_n|$, die von $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ für fast α bewiesen, wobei q_n den n -ten Näherungsnenner von α bedeutet.

Ohne Kenntnis der Kusminischen Arbeit hat P. LÉVY²⁾ die Relation (5) wiederentdeckt, sogar mit dem noch schärferen Restglied $O(q^n)$. Die beiden Beweise sind voneinander gründlich verschieden. KUSMIN macht von der schon von GAUSS bekannten rekurrenten Formel

$$(6) \quad m_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ m_n \left(\frac{1}{k} \right) - m_n \left(\frac{1}{k+x} \right) \right\}$$

Gebrauch, während P. LÉVY eine rekurrente Formel benutzt, in der die Verteilungsfunktionen $m_n(x)$ und auch $m_n^*(x)$ auftreten, wobei $m_n^*(x)$ das Maß der Zahlen α ist, für die $z^* < x$ ist; hier bedeutet z_n den (endlichen) Kettenbruch $[0; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$. Jedenfalls scheinen mir beide Beweise unnötig kompliziert zu sein.

In der vorliegenden Note zeige ich, wie man aus dem Kusminischen Ansatz (6) sehr einfach und rasch zum schärferen P. Lévy'schen Resultat

$$(7) \quad m_n(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2} + O(q^n)$$

gelangen kann, wobei für q die Zahl $2\zeta(3) - \zeta(2)$ gesetzt werden darf. ($\zeta(s)$ ist die Riemannsche Zeta-Funktion.) P. LÉVY's q ist kleiner, nämlich 0,7. Durch eine Verfeinerung der Rechnung kann ich die Zahl q auf

$$|(2\zeta(3) - \zeta(2))(7 + 2\zeta(4) - 6\zeta(3) - \zeta(2))| < 0,4$$

herabdrücken.

§ 1 enthält den Beweis von (7) mit $q = 2\zeta(3) - \zeta(2)$; im § 2 wird gezeigt, daß die Zahl $2\zeta(3) - \zeta(2)$ durch eine wesentlich kleinere ersetzt werden kann.

§ 1

Es sei $f_n(x)$ eine für $0 \leq x \leq 1$ definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f_n(0) = 0, f_n(1) = 1$; ferner seien $f_1(x), f_2(x), \dots$ durch die rekurrente Formel (6) definiert. (Setzt man insbesondere $f_0(x) = m_0(x) = x$, so erhält man die Funktionen $m_n(x)$, die im Gaußschen Problem auftreten.) Da nach Differentiation von (6) eine gleichmäßig konvergente Reihe entsteht, ist die gliedweise Differentiation von (6) statthaft. Ersetzt man $m_n(x)$ durch $f_n(x)$ und führt man diese Differentiation durch, so erhält man

$$(1.1) \quad f'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_n \left(\frac{1}{k+x} \right) \frac{1}{(k+x)^2} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

²⁾ P. LÉVY [5], wiedergegeben auch im Buch [6] von P. LÉVY (S. 301–306).

Um (7) zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß für jede Funktionenfolge $f_0(x), f_1(x), \dots$, für die $f_n(x)$ zweimal stetig differenzierbar ist und $f_1(x), f_2(x), \dots$ durch (6) definiert sind, die Relation

$$(1.2) \quad f'_n(x) = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{1+x} + O(q^n)$$

gilt. Hieraus folgt nämlich (7) sofort durch Integration.

Man setze

$$(1.3) \quad f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{1+x} \quad (n=0, 1, \dots).$$

Dann transformiert sich die rekurrente Formel (1.1) in

$$(1.4) \quad g_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_n\left(\frac{1}{k+x}\right) \frac{1+x}{(k+x)(k+1+x)}.$$

Um (1.2) zu zeigen, genügt es, die Relation

$$(1.5) \quad g_n(x) = \frac{1}{\log 2} + O(q^n)$$

zu beweisen. Statt (1.5) würde die Relation

$$g_n(x) = C_n + O(q^n)$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten C_n aus

$$(1.6) \quad g'_n(x) = O(q^n)$$

folgen; die Relation $C_n = \frac{1}{\log 2} + O(q^n)$ folgt dann aus der Normierungsvoraussetzung $f_n(0) = 0, f_n(1) = 1$. Daher genügt es (1.6) zu beweisen.

SATZ 1. *Es sei $g_0(x)$ eine im Intervall $(0, 1)$ einmal stetig differenzierbare Funktion, ferner seien $g_1(x), g_2(x), \dots$ durch die rekurrente Formel (1.4) definiert. Es sei vorausgesetzt, daß entweder*

$$(1.7) \quad -M_0 \leq g'_0(x) \leq 0$$

oder

$$(1.8) \quad 0 \leq g'_0(x) \leq M_0$$

gilt. Bezeichnet dann M_n das Maximum des absoluten Betrages von $g'_n(x)$ in $(0, 1)$, so gilt

$$(1.9) \quad |g'_{n+1}(x)| \leq (2\zeta(3) - \zeta(2)) \frac{M_n}{(1+x)^2},$$

wobei $\zeta(s)$ die Riemannsche Zeta-Funktion bedeutet.

Dem Beweis muß ein Hilfssatz vorangeschickt werden, der auch nicht ganz ohne Interesse sein dürfte.

HILFSSATZ. $g_0(x), g_1(x), \dots$ bedeuten dasselbe wie im Satz 1. Ist dann $g_0(x)$ in $(0, 1)$ monoton zunehmend, so sind $g_1(x), g_3(x), g_5(x), \dots$ monoton abnehmend, $g_2(x), g_4(x), \dots$ monoton zunehmend; ist $g_0(x)$ monoton abnehmend, so sind $g_1(x), g_3(x), \dots$ monoton zunehmend, $g_2(x), g_4(x), \dots$ monoton abnehmend.

BEWEIS DES HILFSSATZES. Nehmen wir an, $g_0(x)$ sei monoton zunehmend, d. h. es gilt (1. 8). (Der Fall, wenn (1. 7) gilt, kann völlig analog behandelt werden.) Dann gilt wegen (1. 4)

$$(1. 10) \quad g'_1(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} g'_0 \left(\frac{1}{k+x} \right) \frac{1+x}{(k+x)^3(k+1+x)} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} g_0 \left(\frac{1}{k+x} \right) \frac{k(k-1) - (1+x)^2}{(k+x)^2(k+1+x)^2},$$

oder, indem man von der rechten Seite den durch Differentiation der Identität $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+x}{(k+x)(k+1+x)} = 1$ beweisbaren Ausdruck

$$(1. 11) \quad \sum_{k=1}^{\infty} g_0 \left(\frac{1}{1+x} \right) \frac{k(k-1) - (1+x)^2}{(k+x)^2(k+1+x)^2} = 0$$

subtrahiert,

$$(1. 12) \quad g'_1(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} g'_0 \left(\frac{1}{k+x} \right) \frac{1+x}{(k+x)^3(k+1+x)} - \\ - \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ g_0 \left(\frac{1}{1+x} \right) - g_0 \left(\frac{1}{k+x} \right) \right\} \frac{k(k-1) - (1+x)^2}{(k+x)^2(k+1+x)^2}.$$

Nun ist $g_0(x)$ in $(0, 1)$ voraussetzungsgemäß monoton zunehmend, $g'_0 \left(\frac{1}{k+x} \right)$ ist also positiv. Die erste Summe auf der rechten Seite von (1. 12) ist also negativ. Um einzusehen, daß auch die zweite Summe negativ ist, beachte man, daß $k(k-1) - (1+x)^2$ für $k \geq 3$ für jedes x ($0 \leq x \leq 1$) positiv ist. Hieraus folgt wegen des monotonen Zunehmens von $g_0(x)$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left\{ g_0 \left(\frac{1}{1+x} \right) - g_0 \left(\frac{1}{k+x} \right) \right\} \frac{k(k-1) - (1+x)^2}{(k+x)^2(k+1+x)^2} = \\ = \left\{ g_0 \left(\frac{1}{1+x} \right) - g_0 \left(\frac{1}{2+x} \right) \right\} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1) - (1+x)^2}{(k+x)^2(k+1+x)^2},$$

also durch abermalige Anwendung von (1.11)

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ g_n \left(\frac{1}{1+x} \right) - g_n \left(\frac{1}{k+x} \right) \right\} \frac{k(k-1) - (1+x)^2}{(k+x)^2(k+1+x)^2} &\equiv \\ &\equiv \left\{ g_0 \left(\frac{1}{1+x} \right) - g_0 \left(\frac{1}{2+x} \right) \right\} \frac{1}{(2+x)^2} \equiv 0. \end{aligned}$$

Daher ist in (1.12) auch die zweite Summe negativ; aus $g'_0(x) = 0$ folgt also $g'(x) \leq 0$, und durch Wiederholung der obigen Überlegung aus $g'_n(x) \leq 0$ folgt $g'_{n+1}(x) \leq 0$. Damit ist unser Hilfssatz bewiesen.

BEWEIS DES SATZES 1. Differenziert man die rekurrente Formel (1.4) (wir wissen schon, daß das gliedweise Differenzieren statthaft ist), so gilt, analog zu (1.12),

$$\begin{aligned} (1.13) \quad g'_{n+1}(x) &= - \sum_{k=1}^{\infty} g_n \left(\frac{1}{k+x} \right) \frac{1+x}{(k+x)^3(k+1+x)} - \\ &- \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ g_n \left(\frac{1}{1+x} \right) - g_n \left(\frac{1}{k+x} \right) \right\} \frac{k(k-1) - (1+x)^2}{(k+x)^2(k+1+x)^2}, \end{aligned}$$

oder durch Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

$$\begin{aligned} (1.14) \quad g'_{n+1}(x) &= - \sum_{k=1}^{\infty} g'_n \left(\frac{1}{k+x} \right) \frac{1+x}{(k+x)^3(k+1+x)} - \\ &- \sum_{k=2}^{\infty} g'_n \left(\frac{1}{g_k+x} \right) \frac{(k-1)(k(k-1) - (1+x)^2)}{(1+x)(k+x)^3(k+1+x)^2}, \end{aligned}$$

wo $1 < g < k$.

Nun sind sämtliche Faktoren

$$\frac{(k-1)(k(k-1) - (1+x)^2)}{(1+x)(k+x)^3(k+1+x)^2}$$

der zweiten Summe höchstens bis auf den dem Fall $k=2$ entsprechenden positiv; ferner gilt

$$\left. \begin{aligned} &\frac{2 - (1+x)^2}{(1+x)(2+x)^3(3+x)^2} \right\} \geq 0, \quad \text{falls } x \leq \sqrt{2}-1, \\ &< 0, \quad \text{falls } x > \sqrt{2}-1. \end{aligned}$$

Daher folgt aus (1.14) und aus dem Hilfssatz

$$\left| g'_{n+1}(x) \right| \begin{cases} \leq \frac{M_n}{1+x} \left(\frac{1}{(1+x)(2+x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)^2 + (2+x)(1+x)^2}{(k+x)^3(k+1+x)^2} \right), & \text{falls } x \leq \sqrt{2}-1, \\ < \frac{M_n}{1+x} \left(\frac{1}{(1+x)(2+x)} + \frac{1+x}{(2+x)^3(3+x)} + \right. \\ \quad \left. + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k(k-1)^2 + (2+x)(1+x)^2}{(k+x)^3(k+1+x)^2} \right) & \text{sonst,} \end{cases}$$

oder

$$(1.15) \quad |g'_{n+1}(x)| \begin{cases} \leq \frac{M_n}{(1+x)^2} \left(\frac{1}{2+x} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+x)(k(k-1)^2 + (2+x)(1+x)^2)}{(k+x)^3(k+1+x)^2} \right), & \text{falls } x \leq \sqrt[3]{2}-1, \\ < \frac{M_n}{(1+x)^2} \left(\frac{1}{2+x} + \frac{(1+x)^2}{(2+x)^3(3+x)} + \right. \\ \quad \left. + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(1+x)(k(k-1)^2 + (2+x)(1+x)^2)}{(k+x)^3(k+1+x)^2} \right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine elementare Diskussion, die auf der Descartesschen Regel beruht, zeigt, daß der Klammerausdruck auf der rechten Seite von (1.15) für $x=0$ maximal ist. Daher gilt

$$|g'_{n+1}(x)| \leq \frac{M_n}{(1+x)^2} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1) + 2}{k^3(k+1)^2} \right),$$

oder, indem man den Wert des Klammerausdruckes durch die Werte der Riemannschen Zeta-Funktion ausdrückt,

$$|g'_{n+1}(x)| \leq \frac{M_n}{(1+x)^2} (2\zeta(3) - \zeta(2)),$$

womit (1.9) bewiesen ist.

BEMERKUNG. Begnügt man sich in (1.9) statt $2\zeta(3) - \zeta(2)$ mit einer um etwa 0,1 größeren Konstanten (die noch immer kleiner als 1 ist), so wird der Hilfssatz entbehrlich. So kann der Beweis noch wesentlich kürzer geführt werden.

§ 2

Aus (1.9) folgt, daß in (7) für q die Zahl

$$(2.1) \quad C_1 = 2\zeta(3) - \zeta(2)$$

gesetzt werden darf. Nun zeige ich, daß C_1 durch eine wesentlich kleinere Zahl ersetzt werden darf.

SATZ 2. In (7) darf für q die Zahl

$$(2.2) \quad C_3 = \sqrt[3]{C_1 C_2}$$

gesetzt werden, wobei

$$(2.3) \quad C_2 = 7 + 2\zeta(4) - 6\zeta(3) - \zeta(2)$$

bezeichnet.

BEWEIS. Setzt man (1.9) in (1.14) ein, so folgt aus der Positivität von $2 - (1+x)^2$ für $x \leq \sqrt{2} - 1$ und daraus, daß $g'_n(t)$ ihr Vorzeichen im Intervall $(0, 1)$ nicht ändert,

$$(2.4) \quad |g'_{n+1}(x)| \leq C_1 M_{n+1} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1+x}{(k+x)(k+1+x)^3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)(k(k-1)-(1+x)^2)}{(1+x)(k+x)(k+1+x)^4} \right),$$

falls $x \leq \sqrt{2} - 1$; für $x > \sqrt{2} - 1$ gilt dieselbe Abschätzung mit dem einzigen Unterschied, daß dann auch das dem Fall $k=2$ entsprechende Glied in der zweiten Summe fallen gelassen werden muß. Man erhält, ebenso wie bei dem Beweis von (1.9), daß die Klammer auf der rechten Seite von (2.4) für $x=0$ maximal ist, also

$$|g'_{n+1}(x)| \leq C_1 M_{n+1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)^3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(k(k-1)-1)}{k(k+1)^4} \right),$$

oder, indem man den Klammerausdruck wieder durch die Werte der Riemannschen Zeta-Funktion ausdrückt,

$$(2.5) \quad |g'_{n+1}(x)| \leq C_1 C_2 M_{n+1},$$

wobei C_2 die Bedeutung (2.3) hat. (2.5) ist gleichbedeutend mit

$$M_{n+1} \leq C_1 C_2 M_{n+1},$$

womit auch unser Satz 2 bewiesen ist.

BUDAPEST, FORSCHUNGSINSTITUT FÜR MATHEMATIK
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

(Eingegangen am 10. Juni 1960.)

Literaturverzeichnis

- [1] R. KUZMIN, Sur un problème de Gauss, *Atti Congr. Intern. Bologna 1928*, **6**, S. 83—89.
- [2] A. KHINTCHINE, Metrische Kettenbruchprobleme, *Compositio Math.*, **1** (1935), S. 361—382.
- [3] A. KHINTCHINE, Zur metrischen Kettenbruchtheorie, *Compositio Math.*, **3** (1936), S. 276—285.
- [4] A. KHINTCHINE, *Kettenbrüche* (Leipzig, 1956).
- [5] P. LÉVY, Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue, *Bull. Soc. Math. France*, **57** (1929), S. 178—194.
- [6] P. LÉVY, *Théorie de l'addition des variables aléatoires* (Paris, 1954).

ON SOME FURTHER ONE-SIDED THEOREMS OF NEW TYPE IN THE THEORY OF DIOPHANTINE APPROXIMATIONS

By

P. TURÁN (Budapest), member of the Academy

1. A natural generalization of some classical theorems in the theory of diophantine approximations the present author has found in certain systematical estimations concerning generalized power-sums of complex numbers. The fruitfulness of this new trend was shown by various applications in the analysis and analytical number theory.¹ As a typical one of these estimations which can be compared with the results of the present paper we quote the following theorem:²

If m is a non-negative integer, further

$$(1.1) \quad 1 = |z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_n|$$

and $b_1, b_2, \dots, b_n$ are complex numbers with

$$\min_{\mu=1, \dots, n} |b_1 + \dots + b_\mu| > 0,$$

then there is an integer ν with

$$(1.2) \quad m+1 \leq \nu \leq m+n$$

and

$$(1.3) \quad \left| \sum_{j=1}^n b_j z_j^\nu \right| \geq \left(\frac{n}{8e(m+n)} \right)^n \min_{\mu=1, \dots, n} |b_1 + \dots + b_\mu|.$$

As E. MAKAI proved³ replacing on the right side the constant 8 by

¹ See my book *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen* (Budapest, 1953). Here the emphasis was led on the applications; for a first account of a systematization of the underlying theory see my paper "Über eine neue Methode der Analysis" (*Wiss. Zeitschr. der Humboldt Univ. zu Berlin Jg.*, (1955/56), pp. 275—279) as well as the Chinese edition of my book. A completely rewritten and enlarged English version will appear in the *Interscience Tracts* series.

² Originally I stated this theorem with $24e^2$ instead of $8e$; this stronger form is contained in our paper with VERA T. Sós (On some new theorems in the theory of diophantine approximations, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 6 (1955), pp. 241—255), apart from a remark of S. UCHIYAMA, made in his paper "A note on the second main theorem of P. Turán", *ibid.*, 9 (1958), 379—380.

³ See his paper "The first main theorem of P. Turán", *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 10 (1959), pp. 405—412.

$\frac{2}{\log 2} \sim 2,89$, the estimation (1.3) becomes for a suitable system of $(b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*), (z_1^*, \dots, z_n^*)$ with (1.1) false for each $n \geq 2$ and sufficiently large m 's.

2. The number of applications of this theorem in the analytical number theory became in the meantime still larger,⁴ but some questions concerning the sign of the prime number formula or those concerning the distribution of primes in different progressions mod J suggest the search for theorems asserting that

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^n b_j z_j^{\nu_j}$$

assumes in every "not too large" intervals "not too small" positive and "not too large" negative values. Easy counterexamples show, however, that such "one-sided" theorems cannot hold *generally*, i. e. for variable z_j 's satisfying *only* (1.1) (keeping the b_j 's fixed) and all we can hope is to obtain "restricted" one-sided theorems, i. e. such ones where the z_j -variables are subject to a geometrical restriction (beside (1.1)). The following restriction seems to be the most suitable for our purposes:

There is a z with $0 < z \leq \frac{\pi}{2}$ such that on the complex z -plane no z_j -numbers are in the angle

$$(2.1) \quad |\arg z| \leq z.$$

Under this restriction, which might be called $R(z)$ -restriction in the sequel, I proved the following theorem:

If m is a non-negative integer, further

$$1 = |z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_n|$$

and the z_j 's satisfy an $R(z)$ -restriction, then there are positive integers ν_1 and ν_2 with

$$(2.2) \quad m+1 \leq \nu_j \leq m+n \left(3 + \frac{\pi}{z}\right) \quad (j=1, 2),$$

further

$$(2.3) \quad \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n z_j^{\nu_j} \geq \left(\frac{1}{81(m+n)} \right)^{2 \left(3 + \frac{\pi}{z}\right) n^3}$$

⁴ See among others my paper "On the so-called density hypothesis in the theory of the zeta-function of Riemann", *Acta Arith.*, 4 (1958), pp. 31–56; or S. Knapowski, On the mean values of certain functions in prime number theory, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 10 (1959), pp. 375–390; or W. Stas, Über eine Anwendung der Methode von Turán auf die Theorie des Restgliedes im Primidealsatz, *Acta Arith.*, 5 (1959), pp. 179–196 etc.

and

$$(2.4) \quad \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n z_j^{\gamma_j} \leq - \left(\frac{1}{81(m+n)} \right)^{2 \left(3 + \frac{\pi}{\kappa} \right) m^2}.$$

My proof of this theorem together with another one-sided theorems suggested by the theory, appeared in Vol. XI of this periodical. As I learned from a letter of Mr. S. KNAPOWSKI he succeeded in proving by an ingenious use of theorem (2.2)—(2.3)—(2.4) the following theorem which was a long-standing desideratum in the literature⁵ of the prime number theory:

Denoting, as usual, by $A(n)$ the von Mangoldt symbol

$$A(n) = \begin{cases} \log p & \text{for } n = p^\alpha \text{ } (p \text{ prime}), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and by $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ an arbitrary zero of the Riemann zeta-function with $\beta_0 \geq \frac{1}{2}$, $\gamma_0 > 0$, there is a positive, explicitly calculable constant C such that for

$$T > \max(C, e^{\log^2 \gamma_0})$$

we have

$$\max_{1 \leq x \leq T} \left(\sum_{n \leq x} A(n) - x \right) > T^{\beta_0} e^{-15 \frac{\log T}{\log \log T}}$$

and

$$\min_{1 \leq x \leq T} \left(\sum_{n \leq x} A(n) - x \right) < -T^{\beta_0} e^{-15 \frac{\log T}{\log \log T}}.$$

3. Hence the significance of the theorem (2.2)—(2.3)—(2.4) is clear. But it is still unsatisfactory for two reasons. The theorem (1.1)—(1.2)—(1.3) can be applied in some cases⁶ when not all b_j 's are 1; hence in the theorem (2.2)—(2.3)—(2.4) the lack of the coefficients b_j ought to be removed. Secondly, a comparison of theorems (1.1)—(1.2)—(1.3) and (2.2)—(2.3)—(2.4) shows that the right sides of (2.3) and (2.4) are much weaker than that in (1.3) (the occurring exponents being of order n^3 and n , resp.). To meet these requirements we shall prove the following one-sided

THEOREM. *If m is a non-negative integer, further*

$$(3.1) \quad 1 = |z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_n|$$

and the z_j 's satisfy an $R(x)$ -restriction in (2.1), further the b_j 's are complex numbers with

$$\min_{\mu=1,2,\dots,n} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\mu} b_j > 0,$$

⁵ See J. E. LITTLEWOOD, Mathematical notes (12). An inequality for a sum of cosines, *Journal London Math. Soc.*, **12** (1937), pp. 217–222.

⁶ See e. g. S. KNAPOWSKI, On an explicit estimation in the prime number theory, *Journal London Math. Soc.*, **34** (1959), pp. 437–441.

then there exist positive integers ν_1 and ν_2 such that

$$(3.2) \quad m+1 \leq \nu_j \leq m+n \left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right) \quad (j=1, 2),$$

further

$$(3.3) \quad \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n b_j z_j^{\nu_1} \geq \frac{1}{2n+1} \left(\frac{n}{24e^3 \left(m+n \left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)} \right)^{2n} \min_{\mu=1, \dots, n} \left(\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\mu} b_j \right)$$

and

$$(3.4) \quad \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n b_j z_j^{\nu_2} \leq -\frac{1}{2n+1} \left(\frac{n}{24e^3 \left(m+n \left(3 + \frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)} \right)^{2n} \min_{\mu=1, \dots, n} \left(\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\mu} b_j \right).$$

Now the analogy between (1.3) and (3.3)–(3.4) is much more satisfactory; but in the two-sided case we had no $R(\varkappa)$ -restriction. Since the $R(\varkappa)$ -restriction showed itself manageable in the applications, the problem became *important*, in which way the estimation (1.3) can be improved when the z 's satisfy an $R(\varkappa)$ -restriction? To this problem and to the applications of the above theorem I shall return elsewhere.

4. To the proof of our theorem we shall need the

LEMMA. *The polynomial*

$$(4.1) \quad F(z) = z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N$$

with real coefficients and all zeros in the circle $|z| \leq 1$ but outside the angle

$$(4.2) \quad |\arg z| \leq \varkappa \quad \left(0 < \varkappa \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

can be multiplied by a polynomial $\varphi(z)$ with real coefficients (but not necessarily with leading coefficient 1) so that writing

$$(4.3) \quad F(z)\varphi(z) = \sum_{\nu} e_{\nu} z^{\nu}$$

a) the coefficients e_{ν} are non-negative,

b) the degree of $F(z)\varphi(z)$ is

$$\leq \frac{N}{2} \left(1 + \frac{\pi}{\varkappa}\right),$$

c) the inequality

$$\sum_{\nu} e_{\nu} \leq 2^N$$

holds and, finally,

d) the coefficient of the highest power of z in $F(z)\varphi(z)$ is

$$\geq 3^N.$$

5. For the proof of this lemma we shall need some preliminary remarks. First of all we notice the identity

$$(5.1) \quad (1 - 2 \cos \gamma \cdot w + w^2) \sum_{j=0}^k \frac{\sin(j+1)\gamma}{\sin \gamma} w^j = 1 - \frac{\sin(k+2)\gamma}{\sin \gamma} w^{k+1} + \frac{\sin(k+1)\gamma}{\sin \gamma} w^{k+2}$$

for all complex w 's and real γ ; this is an easy consequence of the relation

$$\frac{1}{1 - 2 \cos \gamma \cdot w + w^2} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\sin(\mu+1)\gamma}{\sin \gamma} w^{\mu},$$

valid for $|w| < 1$. Let

$$(5.2) \quad \frac{\pi}{2} \equiv \gamma > 0$$

and we apply (5.1) with

$$k = \left[\frac{\pi}{\gamma} \right] - 1;$$

this gives

$$(5.3) \quad (1 - 2 \cos \gamma w + w^2) \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\pi}{\gamma} \right] - 1} \frac{\sin(\mu+1)\gamma}{\sin \gamma} w^{\mu} = 1 - \frac{\sin \left(1 + \left[\frac{\pi}{\gamma} \right] \gamma \right)}{\sin \gamma} w^{\left[\frac{\pi}{\gamma} \right]} + \\ + \frac{\sin \left[\frac{\pi}{\gamma} \right] \gamma}{\sin \gamma} w^{\left[\frac{\pi}{\gamma} \right] + 1} = 1 + \frac{\left| \sin \left(1 + \left[\frac{\pi}{\gamma} \right] \gamma \right) \right|}{\sin \gamma} w^{\left[\frac{\pi}{\gamma} \right]} + \frac{\left| \sin \left[\frac{\pi}{\gamma} \right] \gamma \right|}{\sin \gamma} w^{\left[\frac{\pi}{\gamma} \right] + 1}.$$

Putting

$$a_{\mu}(\gamma) = \frac{\sin(\mu+1)\gamma}{\sin \gamma} \quad \text{for } \mu \leq \left[\frac{\pi}{\gamma} \right] - 2$$

and

$$(5.4) \quad a_{\mu}(\gamma) = \frac{\sin(\mu+1)\gamma}{\sin \gamma} + \frac{|\sin(\mu+2)\gamma|}{2 \sin \gamma} \quad \text{for } \mu = \left[\frac{\pi}{\gamma} \right] - 1$$

(5.3) gives the following modified identity:

$$(5.5) \quad (1 - 2 \cos \gamma \cdot w + w^2) \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\pi}{\gamma} \right] - 1} a_{\mu}(\gamma) w^{\mu} = 1 + \frac{\left| \sin \left(\left[\frac{\pi}{\gamma} \right] + 1 \right) \gamma \right|}{2 \sin \gamma} w^{\left[\frac{\pi}{\gamma} \right] - 1} + \\ + \left(\frac{\left| \sin \left(\left[\frac{\pi}{\gamma} \right] + 1 \right) \gamma \right|}{\sin \gamma} - 2 \cos \gamma \frac{\left| \sin \left(\left[\frac{\pi}{\gamma} \right] + 1 \right) \gamma \right|}{2 \sin \gamma} \right) w^{\left[\frac{\pi}{\gamma} \right]} + \\ + \left(\frac{\left| \sin \left[\frac{\pi}{\gamma} \right] \gamma \right|}{\sin \gamma} + \frac{\left| \sin \left(\left[\frac{\pi}{\gamma} \right] + 1 \right) \gamma \right|}{2 \sin \gamma} \right) w^{\left[\frac{\pi}{\gamma} \right] + 1} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\pi}{\gamma} \right] + 1} d_{\mu}(\gamma) w^{\mu}.$$

We evidently have for all μ 's

$$(5.6) \quad d_{\mu}(\gamma) \geq 0.$$

Further obviously

$$(5.7) \quad d_{\left[\frac{\pi}{\gamma}\right]+1}(\gamma) = \frac{\sin \left[\frac{\pi}{\gamma}\right] \gamma}{\sin \gamma} - \frac{\sin \left(1 + \left[\frac{\pi}{\gamma}\right]\right) \gamma}{2 \sin \gamma}.$$

Let

$$\frac{\pi}{N^* + 1} < \gamma \leq \frac{\pi}{N^*} \quad (N^* \text{ integer } \geq 2)$$

or rather

$$(5.8) \quad \gamma = \frac{\pi}{N^*} - \vartheta \frac{\pi}{N^*(N^* + 1)} \quad (0 \leq \vartheta < 1);$$

then the expression in (5.7) goes into

$$\frac{\sin N^* \gamma - \frac{1}{2} \sin (N^* + 1) \gamma}{\sin \gamma} \geq \frac{\sin \frac{\vartheta \pi}{N^* + 1} + \frac{1}{2} \sin \frac{(1 - \vartheta) \pi}{N^*}}{\sin \frac{\pi}{N^*}} \stackrel{\text{def}}{=} U(\vartheta).$$

For $0 \leq \vartheta \leq \frac{1}{2}$ we have

$$U(\vartheta) \geq \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2N^*}}{\sin \frac{\pi}{N^*}} = \frac{1}{4 \cos \frac{\pi}{2N^*}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} > \frac{2}{3\pi}$$

and for $\frac{1}{2} \leq \vartheta \leq 1$

$$U(\vartheta) \geq \frac{\sin \frac{\pi}{2N^* + 2}}{\sin \frac{\pi}{N^*}} > \frac{N^*}{N^* + 1} \frac{1}{\pi} \geq \frac{2}{3\pi}.$$

Hence we have

$$(5.9) \quad d_{\left[\frac{\pi}{\gamma}\right]+1}(\gamma) \geq \frac{2}{3\pi},$$

independently of γ .

6. Now we can turn to the proof of our lemma. Write

$$(6.1) \quad -\lambda_j \quad (j = 1, 2, \dots, \gamma_1)$$

for the negative zeros of $F(z)$, further

$$(6.2) \quad r_j e^{\pm i\alpha_j} \quad (j = 1, 2, \dots, \gamma_2)$$

for the complex-conjugate zeros of $F(z)$ with

$$(6.3) \quad \frac{\pi}{2} \leq \alpha_j < \pi$$

and, finally,

$$(6.4) \quad \varrho_j e^{\pm i\beta_j} \quad (j = 1, 2, \dots, \gamma_3)$$

for the complex-conjugate zeros of $F(z)$ with

$$(6.5) \quad \alpha < \beta_j < \frac{\pi}{2};$$

some of these categories can be empty. Then we have

$$(6.6) \quad j_1 + 2j_2 + 2j_3 = N$$

and⁷

$$(6.7) \quad F(z) = \prod_{j=1}^{j_1} (z + \lambda_j) \cdot \prod_{j=1}^{j_2} (z^2 + 2r_j |\cos \alpha_j| z + r_j^2) \cdot \prod_{j=1}^{j_3} (z^2 - 2\varrho_j \cos \beta_j \cdot z + \varrho_j^2).$$

We apply the identity (5.5) with

$$w = \frac{z}{\varrho_j}, \quad \gamma = \beta_j;$$

multiplying by $\varrho_j^{\left\lfloor \frac{\pi}{\beta_j} \right\rfloor + 1}$ this gives the identity

$$(6.8) \quad (z^2 - 2\varrho_j \cos \beta_j \cdot z + \varrho_j^2) \left(\sum_{\mu=0}^{\left\lfloor \frac{\pi}{\beta_j} \right\rfloor - 1} a_\mu(\beta_j) \varrho_j^{\left\lfloor \frac{\pi}{\beta_j} \right\rfloor - 1 - \mu} z^\mu \right) = \sum_{\mu=0}^{\left\lfloor \frac{\pi}{\beta_j} \right\rfloor + 1} d_\mu(\beta_j) \varrho_j^{\left\lfloor \frac{\pi}{\beta_j} \right\rfloor + 1 - \mu} z^\mu.$$

We assert that we may choose as $\varphi(z)$ of our lemma

$$(6.9) \quad \varphi(z) = \prod_{j=1}^{j_3} \left(\sum_{\mu=0}^{\left\lfloor \frac{\pi}{\beta_j} \right\rfloor - 1} a_\mu(\beta_j) \varrho_j^{\left\lfloor \frac{\pi}{\beta_j} \right\rfloor - 1 - \mu} z^\mu \right),$$

i.e.

$$(6.10) \quad F(z)q(z) = \prod_{j=1}^{j_1} (z + \lambda_j) \cdot \prod_{j=1}^{j_2} (z^2 + 2r_j |\cos \alpha_j| z + r_j^2) \cdot \prod_{j=1}^{j_3} \left(\sum_{\mu=0}^{\left\lfloor \frac{\pi}{\beta_j} \right\rfloor + 1} d_\mu(\beta_j) \varrho_j^{\left\lfloor \frac{\pi}{\beta_j} \right\rfloor + 1 - \mu} z^\mu \right).$$

This and (5.6) put assertion a) into evidence. The degree of $F(z)q(z)$ is

$$j_1 + 2j_2 + \sum_{j=1}^{j_3} \left(1 + \left\lfloor \frac{\pi}{\beta_j} \right\rfloor \right),$$

⁷ Empty product means 1.

i. e. owing to (6.5)

$$\leq j_1 + 2j_2 + j_3 \left(1 + \frac{z}{z} \right) \leq \frac{1 + \frac{z}{z}}{2} (j_1 + 2j_2 + 2j_3) = \frac{N}{2} \left(1 + \frac{z}{z} \right)$$

which is precisely assertion b). Further, since we have now

$$0 \leq \lambda_j \leq 1, \quad 0 \leq r_j \leq 1, \quad 0 \leq e_j \leq 1,$$

the formula (6.10) leads to

$$(6.11) \quad \Sigma_{\nu} e_{\nu} = F(1)q(1) \leq 2^{j_1+2j_2} \prod_{j=1}^{j_3} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\pi}{\beta_j} \right] + 1} d_{\mu}(\beta_j) \right\}.$$

Using the explicit forms of the coefficients $d_{\mu}(\beta_j)$ from (5.5) we have

$$(6.12) \quad \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\pi}{\beta_j} \right] + 1} d_{\mu}(\beta_j) \leq 1 + 2 \frac{\left| \sin \left(\left[\frac{\pi}{\beta_j} \right] + 1 \right) \beta_j \right|}{\sin \beta_j} + \frac{\left| \sin \left[\frac{\pi}{\beta_j} \right] \beta_j \right|}{\sin \beta_j} =$$

$$= 1 + \frac{\sin \left[\frac{\pi}{\beta_j} \right] \beta_j}{\sin \beta_j} - 2 \frac{\sin \left(\left[\frac{\pi}{\beta_j} \right] + 1 \right) \beta_j}{\sin \beta_j}.$$

Putting

$$\left[\frac{z}{\beta_j} \right] = \frac{z}{\beta_j} - \vartheta_j \quad (0 \leq \vartheta_j < 1)$$

we get owing to $(0 <) \beta_j < \frac{\pi}{2}$ the inequalities

$$0 \leq \frac{\sin \left[\frac{\pi}{\beta_j} \right] \beta_j}{\sin \beta_j} = \frac{\sin \vartheta_j \beta_j}{\sin \beta_j} < 1$$

and

$$0 \leq \frac{\sin \left(1 + \left[\frac{z}{\beta_j} \right] \right) \beta_j}{\sin \beta_j} = \frac{\sin (1 - \vartheta_j) \beta_j}{\sin \beta_j} \leq 1;$$

thus (6.11) and (6.12) give

$$\Sigma_{\nu} e_{\nu} \leq 2^{j_1+2j_2+2j_3} = 2^N,$$

i. e. assertion c). In order to prove assertion d) of our lemma the coefficient of the highest power of z in $F(z)q(z)$ is owing to (6.10)

$$\prod_{j=1}^{j_3} d_{\left[\frac{\pi}{\beta_j} \right] + 1}(\beta_j),$$

and hence from (5.8) it is

$$\geq \left(\frac{2}{3\pi}\right)^{j_3} \geq \left(\frac{2}{3\pi}\right)^{\frac{N}{2}} > 3^{-N},$$

indeed. Hence our lemma is proved.

7. Now we can turn to the proof of our theorem; we may suppose all z_j 's are different. We introduce the numbers ζ_j and B_j ($j = 1, 2, \dots, 2n$) by

$$(7.1) \quad \left. \begin{aligned} \zeta_{2j-1} &= z_j \\ \zeta_{2j} &= \bar{z}_j \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

and

$$(7.2) \quad \left. \begin{aligned} B_{2j-1} &= b_j \\ B_{2j} &= \bar{b}_j \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

respectively, then we have

$$(7.3) \quad 1 = |\zeta_1| = |\zeta_2| \geq |\zeta_3| = |\zeta_4| \geq \dots \quad (\pi < |\arg \zeta_j| \leq \pi).$$

Let $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l$ be the maximal number of different ζ_j 's and let

$$(7.4) \quad 1 = |\eta_1| \geq |\eta_2| \geq \dots \geq \eta_l \quad (\pi < \arg \eta_j \leq \pi).$$

Evidently

$$(7.5) \quad n \leq l \leq 2n;$$

the η_j 's have obviously the property that with an η_l also $\bar{\eta}_l$ occurs among the η_j 's. Hence the coefficients of

$$(7.6) \quad \Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^l (z - \eta_j)$$

are real and we may apply our lemma to $\Phi(z)$ as $F(z)$; let the corresponding polynomial $\varphi(z)$ be $\varphi^*(z)$. Hence $N=l$ and

$$(7.7) \quad \Phi(z) \varphi^*(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r \equiv \frac{l}{2} \left(1 + \frac{\pi}{\kappa}\right)} e'_r z^r$$

with non-negative coefficients e'_r for which

$$(7.8) \quad \sum_r e'_r \leq 2^l$$

and with the leading coefficient

$$(7.9) \quad \geq 3^{-l}.$$

8. Let

$$(8.1) \quad \delta = 1 - \frac{2n}{m + n \left(3 + \frac{\pi}{\varepsilon} \right)}$$

and

$$(8.2) \quad \psi(z) = \left(\frac{24}{1-\delta} \right)^{2n} \frac{1 + z + z^2 + \dots + z^{l-1}}{\delta^{m+n \left(3 + \frac{\pi}{\varepsilon} \right)}} \Phi(z) q^*(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_r e_r'' z^r.$$

$\psi(z)$ is obviously a polynomial of degree

$$(8.3) \quad \leq \frac{l}{2} \left(3 + \frac{\pi}{\varepsilon} \right) - 1 \leq n \left(3 + \frac{\pi}{\varepsilon} \right) - 1$$

with non-negative coefficients, and if the exact degree of $\Phi(z)q^*(z)$ is N_0 then owing to (7.9)

$$(8.4) \quad \text{coeffs. } z^r \text{ in } \psi(z) \leq \left(\frac{24}{1-\delta} \right)^{2n} \frac{1}{3^r} \delta^{-m-n \left(3 + \frac{\pi}{\varepsilon} \right)} \leq \left(\frac{8}{1-\delta} \right)^{2n} \delta^{-m-n \left(3 + \frac{\pi}{\varepsilon} \right)}$$

for $r = N_0, N_0 + 1, \dots, N_0 + l - 1$.

9. According to a lemma in our above quoted paper with VERA T. SÓS there is an R with

$$(9.1) \quad \delta \leq R \leq 1$$

so that on the whole periphery of $|z| = R$ the lower estimation

$$(9.2) \quad |\Phi(z)| \geq 2 \left(\frac{1-\delta}{4} \right)^l$$

holds, and the same for all partial products. Then the index h is uniquely defined by

$$(9.3) \quad 1 = |\eta_1| \geq |\eta_2| \geq \dots \geq |\eta_h| > R > |\eta_{h+1}| \geq \dots.$$

Let similarly as in the proof of theorem (1.1)—(1.2)—(1.3)

$$(9.4) \quad H_1(z) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=h+1}^l (z - \eta_j) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{l-h} c_j^{(1)} z^j,$$

where the coefficients $c_j^{(1)}$ are obviously *real*. As easy to see, we have

$$(9.5) \quad |c_j^{(1)}| \leq \binom{l-h}{j} \quad (j = 0, 1, \dots, l-h).$$

Further we consider the auxiliary polynomial $H_2(z)$ of degree $\leq h-1$,

* If the product is empty, it means 1.

defined by

$$(9.6) \quad H_2(\eta_j) = \frac{1}{\eta_j^{m+1+N_0} H_1(\eta_j)} \quad (j=1, 2, \dots, h)$$

(N_0 in (8.4)). Owing to the definition of the η_j 's, the Lagrange interpolation formula gives at once that $H_2(z)$ is real on the real axis. Writing $H_2(z)$ first in the form of Newton interpolation polynomial

$$(9.7) \quad \begin{aligned} H_2(z) = & c_0^{(2)} + c_1^{(2)}(z - \eta_1) + c_2^{(2)}(z - \eta_1)(z - \eta_2) + \dots \\ & \dots + c_{h-1}^{(2)}(z - \eta_1)(z - \eta_2) \dots (z - \eta_{h-1}), \end{aligned}$$

we have owing to Nörlund's integral representation

$$c_d^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_1-R} \frac{ds}{s^{m+1+N_0} H_1(s) (s - \eta_1) (s - \eta_2) \dots (s - \eta_{d+1})} \quad (d=0, 1, \dots, h-1)$$

and thus using (9.2) the estimation for all d 's

$$(9.8) \quad |c_d^{(2)}| \leq \frac{1}{2R^{m+N_0}} \left(\frac{4}{1-\delta} \right)^l.$$

Writing $H_2(z)$ in the form

$$(9.9) \quad H_2(z) = \sum_{d=0}^{h-1} c_d^{(3)} z^d$$

the coefficients $c_d^{(3)}$ are real and given by

$$c_{h-1}^{(3)} = c_{h-1}^{(2)}$$

and for $0 \leq d \leq h-2$

$$c_d^{(3)} = c_d^{(2)} - c_{d+1}^{(2)} \sum_{1 \leq j_1 \leq d+1} z_{j_1} + c_{d+2}^{(2)} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq d+2} z_{j_1} z_{j_2} - \dots,$$

thus using (9.8) we have for $d=0, 1, \dots, h-1$ the inequality

$$(9.10) \quad \begin{aligned} |c_d^{(3)}| \leq & \frac{1}{2R^{m+N_0}} \left(\frac{4}{1-\delta} \right)^l \left\{ 1 + \binom{d+1}{1} + \binom{d+2}{2} + \dots \right. \\ & \left. + \binom{h-1}{h-1-d} \right\} = \frac{1}{2R^{m+N_0}} \left(\frac{4}{1-\delta} \right)^l \binom{h}{d+1}. \end{aligned}$$

We need further the polynomial $H_3(z)$ defined by

$$(9.11) \quad H_3(z) \stackrel{\text{def}}{=} H_1(z) H_2(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^{l-1} c_\nu^{(4)} z^\nu$$

with *real* coefficients and of degree $\leq l-1$. For its coefficients we have

$$(9.12) \quad \sum_{\nu=0}^{l-1} |c_{\nu}^{(4)}| \leq \left(\sum_{\nu=0}^{l-h} |c_{\nu}^{(1)}| \right) \left(\sum_{\nu=0}^{h-1} |c_{\nu}^{(2)}| \right) \leq \\ \leq 2^{l-h} 2^{h-1} \frac{1}{R^{m+N_0}} \left(\frac{4}{1-\delta} \right)^l = \frac{1}{2} \frac{1}{R^{m+N_0}} \left(\frac{8}{1-\delta} \right)^l$$

owing to (9.5) and (9.10).

10. Finally, we consider the polynomials

$$(10.1) \quad \psi(z) + z^{N_0} H_3(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu} c_{\nu}^{(5)} z^{\nu},$$

$$(10.2) \quad \psi(z) - z^{N_0} H_3(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu} c_{\nu}^{(6)} z^{\nu};$$

they are first of all polynomials with *real* coefficients, since $H_3(z)$ and $\psi(z)$ are such ones. But we assert, moreover, that all coefficients are *non-negative*. For $\nu < N_0$ this follows simply from the non-negativity of the coefficients e'_{ν} . For $N_0 \leq \nu \leq N_0 + l - 1$ we have

$$c_{\nu}^{(5)} = e'_{\nu} + c_{\nu-N_0}^{(4)},$$

i. e. owing to (8.4) and (9.12)

$$c_{\nu}^{(5)} \leq \left(\frac{8}{1-\delta} \right)^{2n} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{m+n \left(8 + \frac{\pi}{\alpha} \right)} = \frac{1}{2} \frac{1}{R^{m+N_0}} \left(\frac{8}{1-\delta} \right)^l.$$

Taking into account (8.3), further $l \leq 2n$ and $R \geq \delta$, the non-negativity of the coefficients $c_{\nu}^{(5)}$ follows indeed; the assertion for the $c_{\nu}^{(6)}$'s follows analogously. Further, owing to the definitions of $\psi(z)$ and $\Phi(z)$, we have from (10.1) and (10.2)

$$(10.3) \quad \sum_{\nu} c_{\nu}^{(5)} r_{ij}^{\nu} = r_{ij}^{N_0} H_3(r_{ij}), \quad \sum_{\nu} c_{\nu}^{(6)} r_{ij}^{\nu} = -r_{ij}^{N_0} H_3(r_{ij})$$

for $j = 1, 2, \dots, l$. But owing to the definitions of $H_3(z)$, $H_1(z)$ and $H_2(z)$ we have⁹

$$\sum_{\nu} c_{\nu}^{(5)} r_{ij}^{\nu} = \begin{cases} \frac{1}{r_{ij}^{m+1}} & \text{for } j = 1, 2, \dots, h \\ 0 & j = h+1, \dots, l \end{cases}$$

and

$$\sum_{\nu} c_{\nu}^{(6)} r_{ij}^{\nu} = \begin{cases} -\frac{1}{r_{ij}^{m+1}} & \text{for } j = 1, 2, \dots, h \\ 0 & j = h+1, \dots, l \end{cases}$$

⁹ The second category here and later can be empty.

or

$$(10.4) \quad \sum_{\nu} c_{\nu}^{(5)} \eta_j^{m+\nu+1} = \begin{cases} 1 & j=1, 2, \dots, h \\ 0 & j=h+1, \dots, l \end{cases} \text{ for}$$

and

$$(10.5) \quad \sum_{\nu} c_{\nu}^{(6)} \eta_j^{m+1+\nu} = \begin{cases} -1 & j=1, 2, \dots, h \\ 0 & j=h+1, \dots, l \end{cases} \text{ for}$$

Owing to the definition of the ζ_j 's (10.4) and (10.5) hold also replacing the η_j 's by the ζ_j 's, only the role of h is taken perhaps by another $1 \leq h_1 \leq 2n$. Multiplying (10.4) (with ζ_j instead of η_j) by B_j and summing for $j=1, 2, \dots, 2n$ we get

$$\sum_{\nu} c_{\nu}^{(5)} \left\{ \sum_{j=1}^{2n} B_j \zeta_j^{m+\nu+1} \right\} = \sum_{j=1}^{h_1} B_j$$

and similarly

$$\sum_{\nu} c_{\nu}^{(6)} \left\{ \sum_{j=1}^{2n} B_j \zeta_j^{m+1+\nu} \right\} = - \sum_{j=1}^{h_1} B_j$$

or, taking (7.1) and (7.2) into account,

$$(10.6) \quad \sum_{\nu} c_{\nu}^{(5)} \left(\operatorname{Re} \sum_{j=1}^n b_j z_j^{m+\nu+1} \right) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{h_1} b_j$$

and

$$(10.7) \quad \sum_{\nu} c_{\nu}^{(6)} \left(\operatorname{Re} \sum_{j=1}^n b_j z_j^{m+1+\nu} \right) = - \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{h_1} b_j.$$

Hence from the non-negativity of the coefficients $c_{\nu}^{(5)}$ and $c_{\nu}^{(6)}$ and taking into account the fact that the degree of the polynomials in (10.1) and (10.2) is owing to (8.3) and $l \leq 2n$ at most $n \left(3 + \frac{\tau}{\chi} \right) - 1$ we obtained the existence of integers ν_1 and ν_2 with

$$m+1 \leq \nu_1, \quad \nu_2 \leq m+n \left(3 + \frac{\tau}{\chi} \right)$$

and

$$(10.8) \quad \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n b_j z_j^{\nu_1} \geq \frac{\min_{\mu=1, \dots, n} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\mu} b_j}{\sum_{\nu} c_{\nu}^{(5)}}$$

and

$$(10.9) \quad - \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n b_j z_j^{\nu_2} \geq \frac{\min_{\mu=1, \dots, n} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\mu} b_j}{\sum_{\nu} c_{\nu}^{(6)}}.$$

11. In order to complete the proof of our theorem we have to find upper bounds for $\Sigma_\nu c_\nu^{(5)}$ and $\Sigma_\nu c_\nu^{(6)}$. Since they can be done analogously, it suffices to investigate $\Sigma_\nu c_\nu^{(6)}$, say. From (10.2)

$$\Sigma_\nu c_\nu^{(6)} = \psi(1) - H_3(1) \leq \psi(1) + \Sigma_\nu |c_\nu^{(4)}|$$

and using (8.2) and (9.12) it is

$$< \left(\frac{24}{1-\delta} \right)^{2n} - \frac{2n}{\delta^{m+n}\left(3+\frac{\pi}{\alpha}\right)} \Phi(1) q^*(1) + \frac{1}{2} \frac{1}{\delta^{m+n}\left(3+\frac{\pi}{\alpha}\right)} \left(\frac{8}{1-\delta} \right)^{2n}.$$

Using also (7.8) we get

$$(11.1) \quad \Sigma_\nu c_\nu^{(6)} < (2n+1) \left(\frac{48}{1-\delta} \right)^{2n} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{m+n\left(3+\frac{\pi}{\alpha}\right)}.$$

Since we have

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{2n}{m+n\left(3+\frac{\pi}{\alpha}\right)}} \right)^{m+n\left(3+\frac{\pi}{\alpha}\right)} \leq e^{6n},$$

(11.1) completes the proof.

(Received 28 June 1960)

NOTES ON INTERPOLATION. VIII

(MEAN CONVERGENCE IN INFINITE INTERVALS)

By

J. BALÁZS (Budapest) and P. TURÁN (Budapest), member of the Academy¹

1. Let be given the triangular infinite matrix A the n^{th} row of which being

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$$

with

$$(1.1) \quad x_1^{(n)} > x_2^{(n)} > \dots > x_n^{(n)}$$

for $n = 1, 2, \dots$; if there is no danger of misunderstanding, we shall drop the upper index. The n^{th} Lagrange interpolation polynomial $L_n(f, A)$ of a function f belonging to A is the polynomial

$$(1.2) \quad \sum_{\nu=1}^n f(x_\nu^{(n)}) l_{\nu n}(x, A) = \sum_{\nu=1}^n f(x_\nu) l_\nu(x)$$

of degree $< n-1$ which coincides with $f(x)$ at $x = x_\nu^{(n)}$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$). Here

$$(1.3) \quad \omega(x) = \omega_n(x) = \omega_n(x, A) = \prod_{\nu=1}^n (x - x_\nu^{(n)}) = \prod_{\nu=1}^n (x - x_\nu)$$

and the "fundamental functions" $l_{\nu n}(x)$ are given by

$$(1.4) \quad l_{\nu n}(x, A) = l_\nu(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_\nu)(x - x_\nu)}.$$

2. Most of the investigations concerning these polynomials $L_n(f)$ refer to the "finite" case, i. e. when all points of A are e. g. in the interval $[-1, +1]$. The infinite case, i. e. when the points of A are in $[-\infty, +\infty]$, received much less attention; as a matter of fact, we are not aware of any results in this direction apart from those contained in the book of SHOHAT²

¹ The content of this paper was the subject of a lecture we gave at the mathematical symposium of the Humboldt University, Berlin on 11 November 1960.

² Added in proof (2 October 1961). Prof J. GERONIMUS kindly called our attention to the paper of J. SHOHAT entitled "Application of orthogonal Tchebyscheff polynomials etc.", *Annali di Math.*, Ser. IV, **18** (1939), pp. 201–238. Though this paper deals with problem of mean convergence, SHOHAT and TAMARKIN did not find it worth even quote in their book on Moment problem in 1943, though the book contains a detailed chapter on mechanical quadrature.

and TAMARKIN, *The problem of moments*. They deal with the sequence

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_n(f, A) d\psi(x),$$

i. e. with the mechanical quadrature when the n^{th} row of A is given by the zeros of $q_n(x) + c_{n-1}q_{n-1}(x)$; $q_n(x)$ being the n^{th} orthogonal polynomial belonging to the weight $d\psi(x)$ in $[-\infty, +\infty]$. In what follows we shall confine ourselves to a special class B of weights of the form

$$(2.1) \quad p(x)dx = \frac{h(x)}{g(x)} dx;$$

our considerations could be extended to a more general class C , but this would not be *effective*, i. e. the decision, whether or not a given weight belongs to the class C is difficult in general (polynomial approximability along the whole real axis with respect to a given weight is concerned). As to the class B of weights, let $g(x)$ be even and infinitely often derivable with

$$(2.2) \quad g^{(2\nu)}(x) > 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots; x \text{ real}),$$

further for $x > 0$ let $\log g(x)$ be a convex function of $\log x$ and

$$(2.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log g(x)}{x^2} dx = +\infty;$$

as to $h(x)$ we require only non-negativity on the real axis and

$$(2.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx < \infty.$$

One sees at once that $g(x)$ can be chosen e. g. as $\exp(x^{2k})$, k positive integer, or more generally if $g(x)$ is an entire function of the form

$$g_0(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{2\nu},$$

the a_{ν} 's being positive and tending to 0 "not too rapidly". Fixing a $p(x)$ from the class B we choose the matrix of interpolation from the matrix class A_0 the n^{th} row of which consists of the zeros of the equation

$$(2.5) \quad q_n(x) = 0.$$

Now we assert the

THEOREM. If $A \in A_0$, further $f(x)$ is continuous on the real axis satisfying

$$(2.6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

then we have

$$(2.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x) - L_n(f, A)\}^2 p(x) dx = 0.$$

Hence the Lagrange interpolation polynomials converge "in mean" to $f(x)$. As far as we know this is the first general theorem in this direction when the interval is infinite. For finite intervals ERDŐS and the second of us proved the corresponding theorem³ in 1934.

With an arbitrarily small $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ choosing

$$h(x) = e^{-2\varepsilon x^2}, \quad g(x) = e^{(1-2\varepsilon)x^2}$$

$\frac{h}{g}$ obviously belongs to the class B ; hence we got the

COROLLARY. For the Lagrange interpolation polynomial $L_n(f)$ taken at the zeros of $H_n(x)$, the n^{th} Hermite polynomial, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x) - L_n(f)\}^2 e^{-x^2} dx = 0$$

whenever $f(x)$ is continuous and

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) e^{-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)x^2} = 0$$

holds.

This corollary seems not to be noted before. Schwarz's inequality gives further

$$(2.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - L_n(f, A)| \frac{h(x)}{\sqrt{g(x)}} dx = 0$$

for the matrices A_n whenever $f(x)$ is continuous and (2.6) is fulfilled. It would not be difficult to replace in the theorem the continuity by R -integrability of f and f^2 , but in the interpolation theory continuity is the natural requirement.

It would be easy to deduce by a reasoning applied first by FEJÉR the facts

$$(2.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{j=1,2,\dots,n} |x_j^{(n)}| = \infty$$

and, for arbitrarily large $d > 0$,

$$(2.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\nu} (x_{\nu}^{(n)} - x_{\nu+1}^{(n)}) = 0$$

³ P. ERDŐS and P. TURÁN, On Interpolation. I, *Annals of Math.*, **38** (1937), pp. 142—155. The essential relation (13) is stated there if only $\int_{-1}^1 p(x) dx$ exists and $p(x) \geq M$ owing to misprint: the letter M is to be replaced by 0.

where the $\max$ refers to those $x_r^{(n)}$'s for which

$$-d \leq x_{r+1}^{(n)} < x_r^{(n)} \leq d.$$

But it is easy to prove by a direct reasoning that if $p(x) \geq 0$ and all integrals

$$(2.11) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx$$

exist, then (2.9) holds, and to show by an example that

$$x_r^{(n)} \geq -K \quad (r = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots)$$

(K is independent of n) can occur.

3. For the proof we remark first that from (2.2) and (2.3) it follows that $\sqrt{g(x)}$ is even, $\log \sqrt{g(x)}$ is for $x > 0$ a convex function of $\log x$ and

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \sqrt{g(x)}}{x^2} dx = \dots$$

But then the theorem of S. BERNSTEIN—MANDELBROJT[†] gives that for the functions satisfying (2.6) and for an arbitrarily small $\varepsilon > 0$ there is a polynomial $\pi_k(x)$ of degree k such that on the whole real axis

$$(3.1) \quad \frac{|f(x) - \pi_k(x)|}{\sqrt{g(x)}} \leq \varepsilon.$$

Further we shall need the

LEMMA. We have for $n = 1, 2, \dots$ the inequality

$$\sum_{r=1}^n g(x_r) \int_{-\infty}^{\infty} l_r(x)^2 p(x) dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx.$$

For the proof we consider the polynomial $W(x)$ of degree $\leq 2n-1$ uniquely determined by the conditions

$$W(x_r) = g(x_r), \quad W'(x_r) = g'(x_r) \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

This polynomial, as easy to verify, can be written in the form

$$(3.2) \quad W(x) = \sum_{r=1}^n g(x_r) \left\{ 1 - \frac{q''(x_r)}{q'(x_r)} (x - x_r) \left\{ l_r(x)^2 + \sum_{r=1}^n g'(x_r) (x - x_r) l_r(x)^2 \right\} \right\}.$$

Let

$$(3.3) \quad A(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(x) - W(x)$$

which is again infinitely often derivable: then we have for $r = 1, 2, \dots, n$

$$(3.4) \quad A(x_r) = A'(x_r) = 0.$$

[†] S. BERNSTEIN, Leçons sur les propriétés extrêmes etc., and S. MANDELBROJT, Séries adhérentes, régularisation des suites, applications, in part, p. 182.

Owing to the divergence of the integral in (2.3) and the logarithmic convexity of $g(x)$ we easily get that for all fixed positive integer k 's

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|^k}{g(x)} = 0,$$

i. e. from (3.3)

$$(3.5) \quad \operatorname{sg} J(\pm \infty) = +1.$$

We now assert that on the real axis we have

$$(3.6) \quad J(x) \geq 0, \quad \text{i. e.} \quad W(x) \leq g(x).$$

For if we had with a real ξ

$$J(\xi) < 0,$$

then owing to (3.4) and (3.5) $J(x)$ would have at least $2n+1$ real roots (counted by multiplicity), i. e. after repeated applications of Rolle's theorem with a suitable real η

$$J^{(2n)}(\eta) = 0.$$

But since the degree of $W(x)$ is $\leq 2n-1$, (3.3) would give

$$g^{(2n)}(\eta) = 0,$$

in contradiction to (2.2); hence (3.6) is true. Multiplying in (3.6) by $p(x)$ and integrating for $(-\infty, +\infty)$ we get

$$(3.7) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} W(x)p(x)dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx.$$

But owing to the orthogonality property of $q_n(x)$ we have

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_r)l_r(x)^2 p(x)dx = \frac{1}{q'_n(x_r)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} q_n(x) \frac{q_n(x)}{x-x_r} p(x)dx = 0;$$

hence inserting in (3.7) the explicit form of $W(x)$ in (3.2) the lemma follows.

4. Now we can finish the proof of the theorem as follows. We fix an arbitrarily small $\varepsilon > 0$ and consider the polynomial $\tau_k(x)$ from (3.1). Fixing an integer n with $n \geq k+1$, denoting

$$(4.1) \quad f(x) - \tau_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} D(x)$$

and taking into account the linearity of the operation $L_n(f; A)$ and the relation

$$L_n(\tau_k, A) \equiv \tau_k(x)$$

we get at once

$$\begin{aligned}
 J_n &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x) - L_n(f, A)\}^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \{D(x) - L_n(D, A)\}^2 p(x) dx \leq \\
 (4.2) \quad &\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} D^2(x) p(x) dx + 2 \int_{-\infty}^{\infty} L_n(D, A)^2 p(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} J'_n + J''_n.
 \end{aligned}$$

As to J'_n , (3.1), (4.1) and (2.1) give at once

$$(4.3) \quad J'_n \leq \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx.$$

As to J''_n we have

$$(4.4) \quad J''_n = \sum_{\mu} \sum_{r'} D(x_{\mu}) D(x_{r'}) \int_{-\infty}^{\infty} l_{\mu}(x) l_{r'}(x) p(x) dx.$$

Observing as we did in our paper with ERDŐS that for $\mu \neq r'$ again owing to the orthogonality

$$\int_{-\infty}^{\infty} l_{\mu}(x) l_{r'}(x) p(x) dx = \frac{1}{q'_{\mu}(x_{\mu}) q'_{r'}(x_{r'})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_n(x)}{(x - x_{\mu})(x - x_{r'})} q_n(x) p(x) dx = 0$$

we get from (4.4)

$$J''_n = \sum_{\mu=1}^n D(x_{\mu})^2 \int_{-\infty}^{\infty} l_{\mu}(x)^2 p(x) dx,$$

and using (3.1), (4.1)

$$J''_n \leq \varepsilon^2 \sum_{\mu=1}^n g(x_{\mu}) \int_{-\infty}^{\infty} l_{\mu}(x)^2 p(x) dx.$$

Hence by the lemma, (4.3) and (4.2) we get

$$J \leq 2\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx$$

which proves the theorem.

(Received 7 February 1961)

Printed in Hungary

Technikai szerkesztő: Molnár Ferenc

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1961. V. 27. — Terjedelem: 18 (A/5) iv — 7 abra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 61-2349

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in English, German, French and Russian.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address

The rate of subscription to the Acta Mathematica is 110 forints a volume. Orders may be placed with „Kultura“ Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Mathematica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux „Kultura“ (Budapest, I, Fő utca 32. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

„Acta Mathematica“ публикует трактаты из области математических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

„Acta Mathematica“ выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена „Acta Mathematica“ — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет „Kultura“ (Budapest, I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

INDEX

<i>Bognár, M.</i> , On W. Fenchel's solution of the plank problem	269
<i>Péter, Rózsa</i> , Über die Verallgemeinerung der Theorie der rekursiven Funktionen für abstrakte Mengen geeigneter Struktur als Definitionsbereiche	271
<i>Mandan, S. R.</i> , Projective n -simplexes in a $[2n - 2]$	315
<i>Hajnal, A.</i> , On a consistency theorem connected with the generalized continuum problem	321
<i>Ádam, A.</i> , On graphs in which two vertices are distinguished	377
<i>Csiszár, I.</i> , Some remarks on the dimension and entropy of random variables	399
Барбан, М. Б., Нормальный порядок аддитивных арифметических функций на мно- жестве „сдвинутых” простых чисел	409
<i>Szász, F.</i> , Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptideale. II	417
<i>Langer, H.</i> , Ein Zerspaltungssatz für Operatoren im Hilbertraum	441
<i>Szűsz, P.</i> , Über einen Kusminschen Satz	447
<i>Turán, P.</i> , On some further one-sided theorems of new type in the theory of diophan- tine approximations	455
<i>Balázs, J.</i> and <i>Turán, P.</i> , Notes on interpolation. VIII	469